

ECART TYPE EXPERIMENTAL : QUELLE FORMULE CHOISIR ?

Jean-Michel POU

P.D.G de la société DELTA MU Conseil
Président du G.I.E QUANTUM METWORK

DELTA MU Conseil
25, Rue Joseph Desaynard
63000 – Clermont Ferrand
04 73 15 13 00
jmpou@deltamuconseil.fr

Résumé

L'évaluation des incertitudes de mesure, suivant les préconisations du G.U.M, devenu la norme NF ENV 13005 [1], nécessite d'évaluer chacune de ses composantes sous la forme d'écart type. On pressent l'incertitude résultant des méthodes d'évaluation dites de type B, pour lesquelles il convient d'attribuer, parfois arbitrairement, des modèles de distribution mais connaît-on l'imperfection des méthodes dites de type A? La littérature propose différents correcteurs ou formules pour l'estimation de l'écart type expérimental dans le cas des petites séries de résultats! Aucune ne prévoit les mêmes coefficients! A l'aide de la simulation numérique, il est possible d'établir des coefficients et surtout les incertitudes associées aux écarts types expérimentaux.

Experimental standard deviation

Following the recommendations of the G.U.M, which became the standard NF ENV 13005[1], the evaluation of the uncertainties of measure requires to estimate each of its components under the shape of standard deviation. We suppose the uncertainty resulting from methods of evaluation called type B, for which it is advisable to assign, sometimes arbitrarily, models of distribution but do we know the imperfection of the methods called type A? The literature proposes various controllers or formulae for the estimation of the experimental standard deviation in the case of the small series of results! Nobody foresees the same coefficients! By means of the digital simulation, it is possible to establish coefficients and especially the uncertainties associated to the experimental standard deviations.

L'OBJECTIF

Pour le novice, la statistique semble une science quasi exacte dont les théories se présentent comme absolues. L'écart type est, pour le statisticien, ce que la valeur vraie est au métrologue : une valeur inaccessible si ce n'est au prix d'un nombre infini d'échantillons que la réalité économique ne permettra jamais d'obtenir! Néanmoins, et puisqu'il faudra se contenter d'un échantillon de petite dimension, les statisticiens proposent d'évaluer l'écart type « vrai », soit à partir de l'écart type calculé sur la base du prélèvement corrigé d'un facteur donné, soit à partir de l'étendue du prélèvement divisée par un autre facteur.

Le problème commence lorsqu'on prend connaissance des coefficients proposés. Il existe deux normes qui donnent des coefficients correcteurs d'écart type en fonction du nombre de mesures réalisées, ces coefficients étant évidemment différents!

La norme NF X 06-072, peut être obsolète car je ne l'ai pas trouvée sur le site de l'AFNOR, même si elle est citée dans d'autres normes traitant de statistiques, donne les coefficients suivants :

Nb Mesures	2	3	4	5	6	7
Correcteur	1,254	1,128	1,085	1,063	1,05	1,043
8	9	10	11	12	13	14
1,036	1,031	1,028	1,025	1,023	1,02	1,02

La norme NF ENV ISO 14253-2 [2], quant à elle, fixe les coefficients suivants :

Nb Mesures	2	3	4	5	6	7	8	9
Correcteur	7	2,3	1,7	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2

Pour ces deux normes, l'estimation de l'écart type est donnée par la formule :

$$s = b_n \times \sqrt{[\sum (x_i - x_{moy})^2 / (n-1)]}$$

avec b_n , fonction du nombre de mesures, est donné dans les tableaux ci-avant.

Le lecteur pourra noter la différence entre les coefficients proposés par ces deux normes, différence pouvant être conséquente surtout sur les faibles prélèvements.

Une autre stratégie consiste à diviser l'étendue du prélèvement par un coefficient. Là encore, deux documents, dont une norme, donnent des coefficients malheureusement différents. Le fascicule de documentation FD X 07 021 [3] fixe les coefficients suivants :

Nb Mesures	2	3	4	5	6
Diviseur	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534
7	8	9	10	11	12
2,704	2,847	2,97	3,078	3,173	3,258

Le MSA [4], principalement utilisé dans l'industrie automobile, propose les coefficients suivants :

Nb Mesures	2	3	4	5
Diviseur	1,41421	1,91155	2,23887	2,48124
6	7	8	9	10
2,67253	2,82981	2,96288	3,07794	3,17905
11	12	13	14	15
3,26909	3,35016	3,42378	3,49116	3,55333
16	17	18	19	20
3,61071	3,66422	3,71424	3,76118	3,80537

Là encore, les coefficients sont différents et le lecteur ne pourra implicitement connaître celui à choisir en fonction de son besoin.

Ainsi, la littérature propose au moins cinq estimations différentes de l'écart type expérimental, la cinquième étant l'utilisation de la formule, sans correction. **Il est donc légitime de se demander quelle formule choisir ?**

LA METHODE

Pour répondre à cette question, il faudrait savoir qu'elle est l'estimation, entre les cinq proposées, qui s'approche au mieux de l'écart type « vrai ».

La méthode proposée s'appuie sur la simulation numérique. A partir d'une population importante déterminée (plus de 10 000 éléments), on réalise des prélèvements, de 2 à 50 éléments, puis on compare l'écart type du prélèvement à l'écart type théorique déterminé à partir de toute la population.

Afin d'évaluer l'incertitude sur l'écart type, on prélève n fois 2 éléments, n fois 3 éléments, ..., n fois 50 éléments puis on calcule l'écart type moyen et l'écart type de l'écart type pour chaque type de prélèvements (2, 3, ... 50 éléments) et pour chaque formule.

On peut ainsi tracer les courbes suivantes :

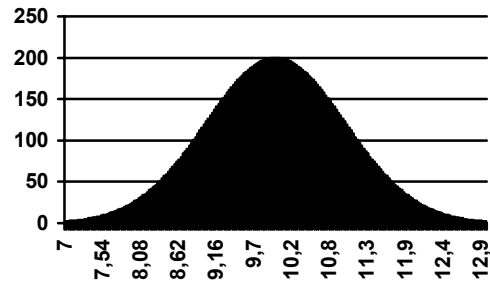
- $100 * (\text{Ecart type Moyen} - \text{Ecart type Population}) / \text{Ecart type Population}$ qui représente, en %, l'écart entre l'écart type expérimental et l'écart type « vrai » pour chaque formule et chaque type de prélèvement
- $100 * (\text{L'écart type de l'écart type} / \text{Ecart type Population})$ qui représente, en %, l'incertitude type de l'écart type obtenu pour chaque formule et chaque type de prélèvement.

Note : Afin de vérifier l'influence de la distribution de la population initiale, ces simulations ont été effectuées pour des distributions de type « Dérivée d'arc-sinus », « Normale », « Triangle rectangle » et « Uniforme ». Pour la clarté de l'exposé, seules les courbes obtenues pour une distribution initiale de type « Normale » sont présentées mais les autres courbes seront présentées en poster au

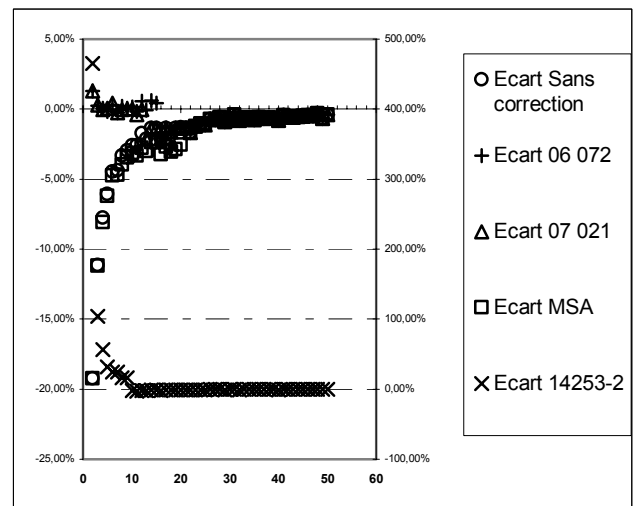
congrès et sont disponibles sur simple demande à l'adresse email indiquée en titre.

LES RESULTATS

Distribution des valeurs initiales :



Nombre d'éléments de la distribution : 16 668



Les courbes montrent que les coefficients proposés par la norme NF ENV ISO 14253-2 [2], pour des prélèvements inférieurs à 10, sont irréalistes. Ils imposent de créer un axe secondaire sur le graphe pour que les autres valeurs soient visibles ! On observe également que les approches suivant NF X 06-072 et FD X 07-021 [3] donnent des résultats satisfaisants. Le tableau ci-dessous donne, pour l'ensemble des prélèvements (2, 3, ... 50 éléments), les erreurs minimale et maximale (en %), pour chacune des estimations :

	Ecart Sans correction	Ecart 06 072	Ecart 07 021	Ecart 14253-2	Ecart MSA
Ecart Max	-0,32%	1,30%	1,28%	465,47%	-0,32%
Ecart Min	-19,22%	-2,11%	-2,11%	-2,59%	-19,22%

Note : Pour des distributions initiales autres que « Normales », les simulations donnent les résultats suivants :

Distribution initiale :

Dérivée d'arc-sinus :

	Ecart Sans correction	Ecart 06 072	Ecart 07 021	Ecart 14253-2	Ecart MSA
Ecart Max	-0,05%	3,70%	2,80%	473,98%	-0,05%
Ecart Min	-18,00%	-0,53%	-18,12%	-0,96%	-27,79%

Triangle rectangle, noté Triangle dans les tableaux :

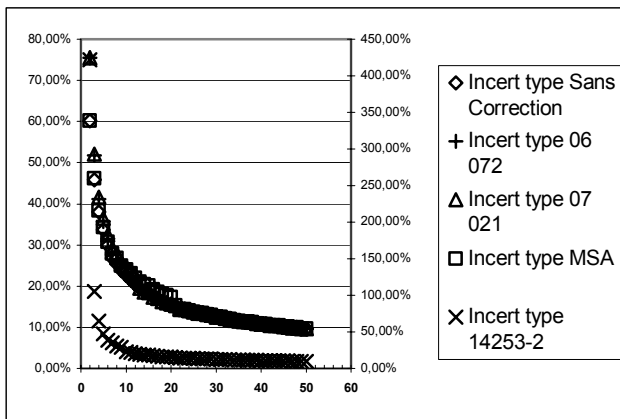
	Ecart Sans correction	Ecart 06 072	Ecart 07 021	Ecart 14253-2	Ecart MSA
Ecart Max	-0,24%	1,76%	1,20%	450,63%	-0,24%
Ecart Min	-21,34%	-1,36%	-7,43%	-2,32%	-21,34%

Uniforme :

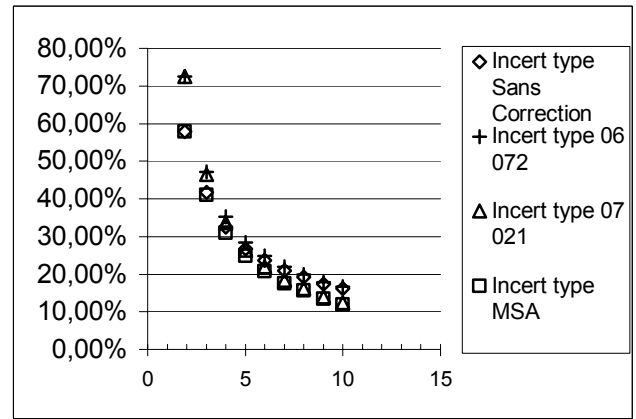
	Ecart Sans correction	Ecart 06 072	Ecart 07 021	Ecart 14253-2	Ecart MSA
Ecart Max	-0,04%	4,88%	4,86%	485,44%	-0,04%
Ecart Min	-16,37%	-0,83%	-9,77%	-1,42%	-17,57%

Note : s'il est entendu que la formule théorique de l'écart type est indépendante de la loi de distribution, le lecteur remarquera que la distribution de la population initiale influence notablement la qualité des écarts types expérimentaux obtenus.

Concernant l'incertitude type de l'écart type expérimental, exprimée en %, les simulations donnent les résultats suivants, pour une distribution initiale « Normale » :



On remarque là encore que les coefficients proposés par la norme NF ENV ISO 14253-2 [2] donnent, pour de faibles prélèvements, des résultats aberrants et obligent de créer un axe secondaire sur le graphique ! Pour les autres approches, l'incertitude type est du même ordre de grandeur. Il est intéressant de « zoomer » sur la zone comprise entre 2 et 10 éléments :



Quelque soit l'estimation choisie, on remarquera qu'un écart type évalué sur la base de moins de cinq mesures a une incertitude type qui varie de 25% (pour 5 mesures) à près de 60% (pour 3 mesures).

En valeur absolue, un écart type estimé à 1, sur la base d'un échantillon de 3 mesures (incertitude type de 60%, soit 0,6), signifie que l'écart type « vrai » est compris dans un intervalle de confiance de 95% (en supposant que la distribution des écarts types suit une loi normale) d'amplitude 0 (l'écart type ne peut pas être négatif : 1 - 1, 2 = -0,2, soit 0 !) à 2, 2. Autant dire que cette estimation n'a aucune valeur !

Il est à noter que l'incertitude type n'est quasiment pas influencée par le modèle de distribution initiale, contrairement aux corrections !

CONCLUSION

La simulation numérique permet de réévaluer les coefficients par lesquels on pourrait corriger les écarts types obtenus sur la base de prélèvements.

Etant donné qu'il est difficile de savoir, au préalable, quel est le modèle de distribution de la population étudiée, la moyenne des coefficients obtenus pour les distributions initiales étudiées pourrait être retenue :

Nb Mesures	Dérivée d'arc sinus	Normale	Triangle	Uniforme	Moyenne
2	1,220	1,238	1,271	1,196	1,231
3	1,091	1,125	1,109	1,106	1,108
4	1,046	1,084	1,090	1,055	1,069
5	1,033	1,065	1,048	1,039	1,046
6	1,026	1,047	1,035	1,032	1,035
7	1,014	1,046	1,037	1,020	1,029
8	1,013	1,034	1,030	1,023	1,025
9	1,012	1,030	1,023	1,014	1,020
10	1,009	1,026	1,024	1,014	1,018
11	1,010	1,027	1,019	1,013	1,017
12	1,007	1,017	1,020	1,009	1,013
13	1,009	1,022	1,015	1,013	1,014
14	1,006	1,014	1,012	1,008	1,010

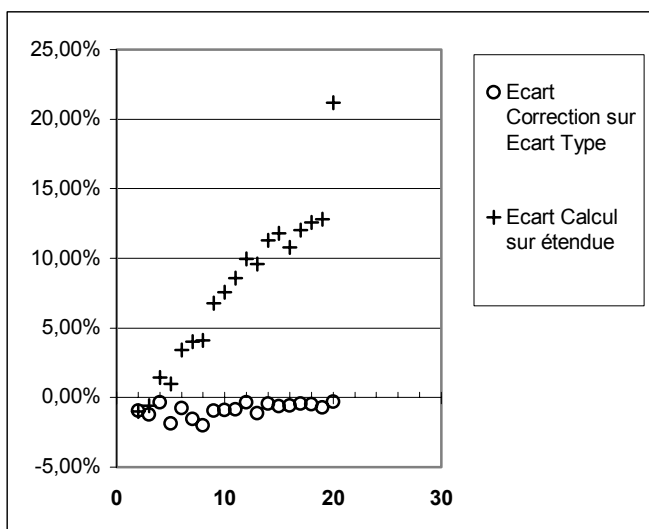
15	1,005	1,014	1,015	1,012	1,012
16	1,005	1,022	1,010	1,007	1,011
17	1,004	1,014	1,009	1,008	1,009
18	1,003	1,016	1,008	1,008	1,009
19	1,005	1,014	1,008	1,007	1,008
20	1,005	1,013	1,007	1,008	1,008

De même, en travaillant sur les étendues, les coefficients « diviseurs » pourraient être les suivants :

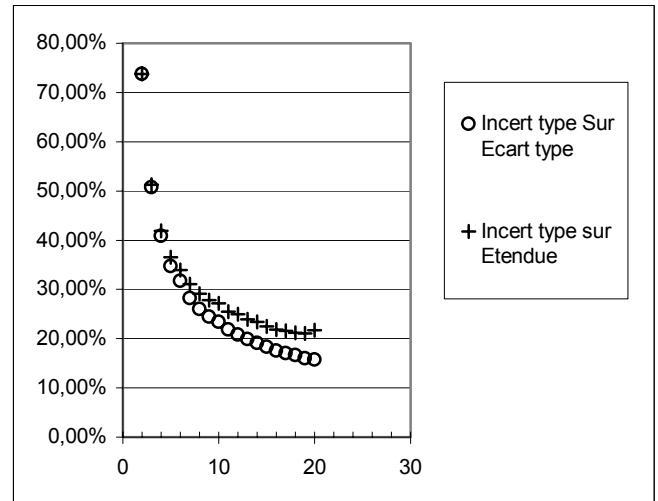
Nb Mesures	Dérivée d'arc sinus	Normale	Triangle	Uniforme	Moyenne
2	1,160	1,142	1,112	1,183	1,149
3	1,723	1,698	1,713	1,716	1,712
4	2,052	2,058	2,020	2,078	2,052
5	2,247	2,327	2,297	2,308	2,295
6	2,369	2,545	2,487	2,471	2,468
7	2,475	2,697	2,605	2,608	2,596
8	2,537	2,846	2,723	2,689	2,699
9	2,578	2,971	2,814	2,776	2,785
10	2,618	3,079	2,891	2,840	2,857
11	2,643	3,160	2,952	2,892	2,912
12	2,668	3,257	3,016	2,940	2,970
13	2,685	3,322	3,078	2,975	3,015
14	2,702	3,408	3,123	3,013	3,062
15	2,712	3,470	3,158	3,028	3,092
16	2,761	3,547	3,251	3,110	3,167
17	2,766	3,614	3,283	3,126	3,197
18	2,773	3,647	3,308	3,141	3,217
19	2,774	3,696	3,328	3,162	3,240
20	2,607	3,519	3,159	2,976	3,066

En appliquant ces nouveaux coefficients, les graphes des pages 1 et 2 deviennent, pour une distribution initiale « Normale » :

Graphe des écarts



Graphe des incertitudes types :



Ces deux graphes, ainsi que les résultats ci-dessous, montrent qu'il est préférable de corriger l'écart type calculé par la formule théorique plutôt que de travailler sur la base de l'étendue !

Pour des distributions initiales différentes, les erreurs minimale et maximale (en %), pour chacune des estimations, sont les suivantes :

Loi normale :

	Ecart Correction sur Ecart Type	Ecart Calcul sur étendue	Incert type Sur Ecart type	Incert type sur Etendue
Max	-0,29%	21,17%	73,71%	73,70%
Min	-2,01%	-0,98%	15,79%	21,02%

Dérivée d'arc-sinus :

	Ecart Correction sur Ecart Type	Ecart Calcul sur étendue	Incert type Sur Ecart type	Incert type sur Etendue
Max	1,66%	-0,35%	72,25%	72,24%
Min	-1,99%	-15,37%	8,90%	2,47%

Triangle rectangle :

	Ecart Correction sur Ecart Type	Ecart Calcul sur étendue	Incert type Sur Ecart type	Incert type sur Etendue
Max	0,22%	8,15%	75,16%	75,15%
Min	-1,29%	-1,20%	13,91%	13,63%

Uniforme :

	Ecart Correction sur Ecart Type	Ecart Calcul sur étendue	Incert type Sur Ecart type	Incert type sur Etendue
Max	1,67%	2,59%	71,75%	71,74%
Min	-0,51%	-3,52%	10,74%	7,07%

Références

[1] NF ENV 13 005 : « Guide pour l'expression des incertitudes de mesure »

[2] NF ENV ISO 14253-2 : Vérification par la mesure des pièces et équipements de mesure. Partie 2 : Guide pour l'estimation de l'incertitude de mesure dans l'étalonnage des équipements de mesure et dans la vérification des produits.

[3] FD X 07-021: Aide à la démarche pour l'estimation et l'utilisation de l'incertitude des mesures et des résultats d'essais

[4] M.S.A : Measurement System Analysis