Covariance dans le processus d'étalonnage

Christophe Dubois[1,a]
[1]Delta Mu, Centre d'affaires du Zénith, Le trident E – 48 rue Sarliève, 63800 Cournon d'Auvergne, France

Abstract. Il est d'usage d'analyser un processus d'étalonnage en établissant un bilan d'incertitude, c'est à dire en listant toutes, ou du moins le plus grand nombre, de causes d'incertitude. Les différentes composantes d'incertitudes sont quantifiées à l'aide d'une méthode de type A ou de type B (cf. GUM [1]). L'incertitude d'étalonnage est alors déduite en sommant en variance ces incertitudes type. Dans cette étape on oublie souvent de tenir compte de la covariance entre les causes d'incertitude, c'est à dire de leur indépendance. En effet, certaines incertitudes n'ont pas nécessairement eu le temps de s'exprimer totalement c'est-à-dire de varier sur toute leur plage de variation possible pendant la durée de l'étalonnage (par exemple l'effet inter-opérateur lorsque le même opérateur effectue l'étalonnage d'un instrument) et d'autres sont intimement liées entre elles et varient de concert pendant la mesure (par exemple la température de l'étalon et du moyen). En s'appuyant sur le concept de « variance forte opportunité » et de « variance faible opportunité », cet article présente une méthode pour calculer ces covariances.

1 Que recherche-t-on

Dans un bilan d'incertitude d'étalonnage, les différentes composantes d'incertitudes sont regroupées au sein d'un tableau et chaque composante est ensuite quantifiée à l'aide d'une méthode de type A ou de type B (cf. GUM [1]). Les différentes composantes sont exprimées à l'aide d'incertitude type ou de leur variance.

Lorsqu'on réalise cette analyse, on examine pour chaque composante l'étendue des variations probables et si possible la loi de distribution associée. Dans cette analyse, nous souhaitons établir une évaluation d'incertitude représentative de tous les étalonnages réalisés pour un type d'instrument, car nous ne souhaitons pas refaire une évaluation d'incertitude à chaque étalonnage.

Cependant, la réalisation d'un étalonnage ne dure en général pas très longtemps. Aussi, certains effets variables sur du long terme ne le sont pas pendant le temps de l'étalonnage. Ils peuvent être alors interprétés, à court terme, comme des erreurs systématiques qu'il ne faudrait pas attribuer par erreur à l'instrument.

De plus, certaines causes d'incertitudes peuvent être communes à l'étalon et à l'instrument que l'on souhaite étalonner. Ce phénomène de causes communes peut faire augmenter ou diminuer la dispersion apparente des résultats d'étalonnage. Il faut encore une fois veiller à ne pas attribuer à tort cette variation à l'instrument.

Ces deux phénomènes sont modélisés mathématiquement par la covariance : covariance entre les incertitudes sur des résultats de mesure successifs dans le premier cas et covariance entre des sources d'incertitude corrélées dans le second cas.

Le but de cet article est de proposer un modèle permettant de calculer ces covariances lors de l'étalonnage.

2 Etat des lieux

Ce phénomène de covariance dans la mesure est bien évidemment abordé dans la littérature.
Le GUM propose une formule pour tenir compte de la covariance dans l'évaluation de l'incertitude de mesure :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \mathrm{cov}(x_i, x_j) \qquad (1)$$

Dans la suite de l'article, les mêmes notations que celles proposées dans le GUM §4.1 sont utilisées, c'est à dire, l'estimateur de la grandeur X_i est noté x_i. Il faut bien comprendre que par la notation $\mathrm{cov}(x_i,x_j)$, nous cherchons à exprimer la covariance entre les erreurs sur les x_i et x_j et non pas entre leurs grandeurs. En effet, les grandeurs X_i et X_j peuvent être corrélées sans que leurs erreurs le soient. Par exemple, les grandeurs courant et tension sont liées par la loi d'Ohm, mais pas nécessairement leurs erreurs. Cependant cet abus de notation est tout à fait acceptable car dans le cas d'un étalonnage, car on considère la mesure à un niveau donné supposé connu et on s'intéresse implicitement qu'à l'erreur.

[a] Christophe Dubois: cdubois@deltamu.fr

2.1 Le GUM

Pour estimer cette covariance, le GUM [1] propose 3 stratégies.

2.1.1 Coefficient de corrélation

Le GUM (§5.2.2) propose d'utiliser le concept de coefficient de corrélation :

$$r(x_i, x_j) = \frac{\operatorname{cov}(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{2}$$

D'où l'équation d'incertitude

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} r(x_i, x_j)u(x_i)u(x_j) \tag{3}$$

Cet outil a en effet l'avantage par rapport à la covariance, d'avoir un sens physique interprétable. En effet, il évolue dans intervalle compris entre -1 et 1, 0 signifiant une indépendance totale entre les variables et 1 (ou -1) une corrélation complète.

Le GUM ne présente d'exemple d'utilisation que lorsque la corrélation est totale, c'est à dire lorsque r prend pour valeur 1 (ou -1).

2.1.2 Expérimentale

Le GUM (§5.2.3) propose aussi d'évaluer expérimentalement la covariance.

$$\operatorname{cov}(x_i, x_j) = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_{i,k} - \overline{x_i})(x_{j,k} - \overline{x_j})}{n-1} \tag{4}$$

Mais il rarement possible d'évaluer expérimentalement les covariances, surtout sur des mesures qui ne seraient pas simultanée (par exemple la covariance entre des étalons de différents niveaux). De plus, lorsque le calcul est possible, la valeur obtenue n'est qu'un estimateur de la covariance, donc avec un niveau de confiance donné dépendant du nombre d'échantillons de l'opération d'étalonnage.

2.1.3 Considérations physiques

Le GUM (§5.2.4) propose aussi de s'affranchir des problématiques de covariance en tenant compte de considérations physiques sur la mesure effectuée.
Par exemple, lors de la mesure d'une pièce acier avec un pied à coulisse, on peut s'affranchir des problématiques de corrélation liées à la température en considérant que le pied à coulisse et la pièce étant à la même température, le phénomène se compense.

Ou bien, si la corrélation concerne des causes ayant un poids faible sur l'incertitude finale, la covariance éventuelle peut être négligée.

En conclusion, les solutions proposées par le GUM concernent certains cas particuliers, mais pour les autres cas il propose de faire preuve de « perspicacité fondée sur l'expérience et les connaissances générales » (§5.2.5). Comment faire, concrètement, dans les cas où la covariance n'est pas négligeable et ne peut pas non plus être facilement contournée.

2.2 Variance HO et LO

Au cours de l'étalonnage, certaines sources d'incertitude n'ont pas le temps (l'opportunité) de varier. Elles prennent une valeur (inconnue) en début d'opération et gardent cette valeur jusqu'au bout. Ces sources d'incertitude se comportent donc comme des erreurs systématiques au cours de l'étalonnage. Ce phénomène est modélisé par la covariance entre les résultats de mesure. La notion de covariance revient donc à se demander si pendant la durée de l'étalonnage la source d'incertitude a eu le temps de s'exprimer, de varier. Et si oui, dans quelle proportion de sa plage de variation ?

Une solution de formalisation a été proposée dans un article du congrès de métrologie de Lyon en 2005 [2] puis reprise dans le guide technique du CFM [3]. Il s'agit, en se basant sur l'expérience, de caractériser la stabilité de la source d'incertitude pendant l'opération d'étalonnage. Certaines sources ont une forte opportunité de varier, elles sont qualifiées de HO (« High Opportunity ») et d'autres au contraire varient peu ou pas et sont qualifiées de LO (« Low Opportunity »). Un coefficient, nommé Lk, est associé à la source d'incertitude et permet de quantifier sa stabilité pendant la durée d'étalonnage. Il s'exprime en pourcentage et s'utilise de la manière suivante :

Lk=100% : source faible opportunité. La source d'incertitude reste stable à 100% pendant la durée de l'étalonnage, c'est-à-dire qu'elle ne varie pas. Il s'agit typiquement de l'incertitude inter-opérateur dans une opération d'étalonnage. En effet, c'est le même opérateur qui effectue l'ensemble des mesures d'étalonnage, la dispersion inter-opérateur ne peut donc pas s'exprimer.

Lk= 0% : source forte (haute) opportunité. La source d'incertitude reste stable à 0%, c'est-à-dire qu'elle n'est pas stable du tout et qu'au contraire, elle prend toute les valeurs possibles pendant la durée de l'étalonnage. Il s'agit typiquement de la répétabilité.
Il y a les cas intermédiaires, comme par exemple

Lk=75% : phénomène qui reste stable à 75%, c'est à dire qui ne varie que dans 25% de sa plage de variation. Cet exemple peut correspondre la source d'incertitude amenée par la température dans un local climatisé à 20 ±2°C. En effet, pendant la durée d'un étalonnage relativement court, nous pouvons considérer que la température n'a pu bouger que de 1°C, soit seulement 25% de sa plage de variation de ±2°C. Elle est donc restée stable à 75%.

L'évaluation du Lk est basée sur la connaissance et l'expérience acquise sur le processus étudié. Cette évaluation peut sembler arbitraire, mais elle suit la même stratégie que le GUM lorsqu'il propose de choisir la loi de distribution et l'amplitude de variation pour l'évaluation de l'écart-type selon la méthode Type B. Par ailleurs, elle est plus « physique » que la détermination de la loi de distribution souvent hasardeuse.

Dans la suite de cet article, cette formalisation est utilisée pour estimer les covariances dans le processus d'étalonnage.

3 Modélisation

3.1 Bilan des causes classique

Un étalonnage est une comparaison entre la valeur étalon, notée x dans la suite de l'article, et la valeur mesurée du moyen, notée y.

Lors d'une estimation d'incertitude de mesure selon la méthode du GUM, les informations sont généralement synthétisées dans un tableau similaire à celui présenté ci-dessous :

Tableau 1. Exemple de bilan d'incertitude avec colonne L_k

indice	Cause d'incertitude	type	Amplitude de variation	Loi de distribution	Ecart type
C1X	étalonnage	B	0,02	normale	u_{c1x}
C2X	…				u_{c2x}
C1Y	Répétabilité	A	-	-	u_{c1y}
C2Y	Résolution	B	0,1	rectangle	u_{c2y}
C3Y	…				u_{c3y}

Pour les besoins de l'article, il a été nécessaire d'ajouter la colonne « indice » qui identifie la source d'incertitude par une syntaxe qui permet son utilisation dans les formules utilisées dans la suite de l'article.

CiX : $i^{ième}$ cause d'incertitude sur la connaissance de X, $i\in[1 ;n_x]$, n_x est le nombre totale de source d'incertitude retenu pour X

CiY : $i^{ième}$ cause d'incertitude sur la connaissance de Y, $i\in[1 ;n_y]$, n_y est le nombre totale de source d'incertitude retenu pour Y.

Remarque : les sources d'incertitude peuvent dépendre du niveau auquel est effectué l'étalonnage. L'écart-type résultant peut donc avoir une part variable dépendant du niveau.

3.2 Covariance

Le précédant tableau de synthèse répond bien au besoin de calcul d'incertitude lorsque les causes d'incertitudes sont indépendantes. Le but de ce paragraphe est de proposer une méthode pour compléter le tableau et permettre l'évaluation des covariances afin de pouvoir compléter la matrice de variances-covariances utilisée pour l'exploitation des résultats d'étalonnage, notamment pour l'estimation de la courbe d'étalonnage selon les méthodes proposées par le guide du CFM [3].

La matrice de variance covariance se présente ainsi :

Tableau 2. Exemple de matrice de variances-covariances

	X1	X2	Y1	Y2
X1	u^2_{x1}	cov($x1$,$x2$)	cov($x1$,$y1$)	cov($x1$,$y2$)
X2	cov($x2$,$x1$)	u^2_{x2}	cov($x2$,$y1$)	cov($x2$,$y2$)
Y1	cov($y1$,$x1$)	cov($y1$,$x2$)	u^2_{y1}	cov($y1$,$y2$)
Y2	cov($y2$,$x1$)	cov($y2$,$x2$)	cov($y2$,$y1$)	u^2_{y2}

xi : estimation de l'étalon pour les différents niveaux i

yi : estimation du moyen donnée pour l'étalon au niveau i

u_{xi} : incertitude sur la connaissance de l'étalon au niveau i, évalué par une méthode classique du GUM.

u_{yi} : incertitude sur la valeur du moyen au niveau i, évalué par une méthode classique du GUM.

cov (.., ..) : covariance entre les grandeurs.

La covariance provient de deux phénomènes physiques différents.

1-Les covariances entre les mesures effectuées sur des niveaux différents, proviennent des sources d'incertitudes qui ne varient pas (ou peu) dans le temps au cours de l'étalonnage sur les différentes mesures (typiquement l'opérateur).

2-Les covariances entre l'étalon et le moyen représentent les sources d'incertitude qui sont liées au moment de la mesure. Typiquement, quel que soit la température, elle sera la même pour l'étalon et le moyen.

3.2.1 Covariance entre les niveaux

Ce paragraphe présente une méthode pour déterminer la covariance entre les niveaux, c'est-à-dire les termes $\mathrm{cov}(x_i,x_j)$ ou $\mathrm{cov}(y_i,y_j)$.

Le tableau de bilan des causes d'incertitude doit être complété avec la notion de variance LO et HO présentée au paragraphe 2.2 en ajoutant une colonne pour le paramètre L_k.

Tableau 3. Exemple de bilan d'incertitude avec colonne L_k

indice	…	Ecart type	L_k
C1X		u_{c1x}	0%
C2X		u_{c2x}	80%
C1Y		u_{c1y}	100%
C2Y		u_{c2y}	80%
C3Y		u_{c3y}	0%

Dans un premier temps, l'étude est effectuée sur la covariance sur l'étalon x.

Un résultat de mesure peut être modélisé de la façon suivante :

$$x_i = x_{vcvi} + \sum_{k=1}^{n_x} e_{ckxi} \qquad (5)$$

x_i : valeur nominal de l'étalon au niveau i

x_{vcvi} : valeur conventionnellement vraie (inconnue) de l'étalon pour le niveau i

e_{ckxi} : erreur sur l'étalon de niveau i à cause de la source d'incertitude k

n_x : nombre de sources d'incertitude retenue pour l'étalon.

$$\mathrm{cov}(x_i;x_j)=\mathrm{cov}(x_{vcvi}+\sum_{k=1}^{n_x}e_{ckxi};x_{vcvj}+\sum_{k=1}^{n_x}e_{ckxj}) \qquad (6)$$

Etant donnée la propriété de la covariance par rapport à l'addition (bilinéarité de la covariance) et la covariance avec un constant étant nul, il vient :

$$\mathrm{cov}(x_i;x_j)=\sum_{k=1}^{n_x}\sum_{l=1}^{n_x}\mathrm{cov}(e_{ckxi};e_{clxj}) \qquad (7)$$

Les causes sont supposées indépendantes entre elles pour l'étalon. C'est une hypothèse simplificatrice mais réaliste. Cependant, il est possible de tenir compte des éventuels liens entre les sources d'incertitude de l'étalon, mais cela complexifie la présentation (introduction de causes communes de variation présentées dans le paragraphe suivant)

$$\mathrm{cov}(x_i;x_j)=\sum_{k=1}^{n_x}\mathrm{cov}(e_{ckxi};e_{ckxj}) \qquad (8)$$

L'erreur pendant l'opération d'étalonnage peut être décomposée en une erreur LO, correspondant à la fraction stable de l'erreur pendant l'étalonnage et une erreur HO correspondant à la partie totalement variable.

$$e_{ckxi}=e_{ckxi,LO}+e_{ckxi,HO} \qquad (9)$$

En remplaçant dans l'équation, il vient :

$$\mathrm{cov}(x_i;x_j)=\sum_{k=1}^{n_x}\mathrm{cov}(e_{ckxi,LO}+e_{ckxi,HO};e_{ckxj,LO}+e_{ckxj,HO}) \qquad (10)$$

$$\mathrm{cov}(x_i;x_j)=\sum_{k=1}^{n_x}\begin{bmatrix}\mathrm{cov}(e_{ckxi,LO};e_{ckxj,LO})\\+\mathrm{cov}(e_{ckxi,LO};e_{ckxj,HO})\\+\mathrm{cov}(e_{ckxi,HO};e_{ckxj,LO})\\+\mathrm{cov}(e_{ckxi,HO};e_{ckxj,HO})\end{bmatrix} \qquad (11)$$

Par définition, les erreurs HO sont totalement indépendantes, donc

$$\mathrm{cov}(x_i;x_j)=\sum_{k=1}^{n_x}\mathrm{cov}(e_{ckxi,LO};e_{ckxj,LO}) \qquad (12)$$

L'écart-type de l'erreur e_{ckxi} et donc l'incertitude de la cause ck peut être décomposée en une partie LO et HO

$$u_{ckxi}^2=L_k u_{ckxi}^2+(1-L_k)u_{ckxi}^2 \qquad (13)$$

En normalisant l'erreur,

$$\mathrm{cov}(x_i;x_j)=\sum_{k=1}^{n_x}\mathrm{cov}(\sqrt{L_k u_{ckxi}^2}\,\frac{e_{ckxi,LO}}{\sqrt{L_k u_{ckxi}^2}};\sqrt{L_k u_{ckxj}^2}\,\frac{e_{ckxj,LO}}{\sqrt{L_k u_{ckxj}^2}}) \qquad (14)$$

$$\mathrm{cov}(x_i;x_j)=\sum_{k=1}^{n_x}L_k u_{ckxi}u_{ckxj}\,\mathrm{cov}(\frac{e_{ckxi,LO}}{\sqrt{L_k u_{ckxi}^2}};\frac{e_{ckxj,LO}}{\sqrt{L_k u_{ckxi}^2}}) \qquad (15)$$

Sachant que par définition les variances LO sont stables pendant l'étalonnage, leur covariance normalisée est égale à 1.

$$\mathrm{cov}(x_i;x_j)=\sum_{k=1}^{n_x}L_k u_{ckxi}u_{ckxj} \qquad (16)$$

Remarque : dans ce cas, le coefficient L_k est similaire au coefficient de corrélation r défini dans la formule généralisée du GUM (§5.2.2).

Lors d'un bilan de causes d'incertitude, il est intéressant de connaitre l'impact d'une cause d'incertitude sur l'incertitude totale. On peut introduire la notion de poids de la cause d'incertitude par rapport à l'incertitude définie par :

$$p_{ckxi}=\frac{u_{ckxi}^2}{u_{xi}^2} \qquad (17)$$

soit

$$u_{ckxi}=u_{xi}\sqrt{p_{ckxi}} \qquad (18)$$

p_{ckxi} : poids de la cause d'incertitude k par rapport à l'incertitude sur l'étalon au niveau i (à multiplier par 100 pour avoir le poids en pourcentage)
u_{ckxi} : incertitude de la cause k sur l'étalon au niveau i
u_{xi} : incertitude totale sur l'étalon au niveau i
Remarque : la somme des poids du bilan d'incertitude est égale à 1 (100%)

Donc la covariance entre les étalons lors de l'étalonnage, peut être obtenue par la formule suivante :

$$\mathrm{cov}(x_i;x_j)=u_{xi}u_{xj}\sum_{k=1}^{n_x}L_k\sqrt{p_{ckxi}\,p_{ckxj}} \qquad (19)$$

La covariance entre les résultats du moyen de mesure peut être calculée de manière similaire

$$\mathrm{cov}(y_i;y_j)=u_{yi}u_{yj}\sum_{k=1}^{n_y}L_k\sqrt{p_{ckyi}\,p_{ckyj}} \qquad (20)$$

1.1.1 Covariance entre l'étalon et le moyen

Ce paragraphe présente une méthode pour déterminer la covariance entre l'étalon et le moyen pour un niveau donné, c'est-à-dire les termes cov (x_i,y_i).

Le début du raisonnement est similaire à celui du paragraphe précédent. Un résultat de mesure peut être modélisé de la façon suivante :

$$x_i=x_{vcvi}+\sum_{k=1}^{n_x}e_{ckxi}\ ;\ y_i=y_{vcvi}+\sum_{k=1}^{n_y}e_{ckyi} \qquad (21)$$

x_i , y_i: valeur nominal au niveau i
x_{vcvi} , y_{vcvi} : valeur conventionnellement vraie (inconnue) pour le niveau i
e_{ckxi} , e_{ckyi} : erreur au niveau i à cause de la source d'incertitude k
n_x , n_y: nombre de source d'incertitude retenue

$$\mathrm{cov}(x_i ; y_i) = \mathrm{cov}(x_{vcvi} + \sum_{k=1}^{n_x} e_{ckxi} ; y_{vcvi} + \sum_{k=1}^{n_y} e_{ckyi}) \quad (22)$$

Etant donnée la propriété de la covariance par rapport à l'addition (bilinéarité de la covariance) et la covariance avec un constant étant nulle, il vient

$$\mathrm{cov}(x_i ; y_i) = \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{l=1}^{n_y} \mathrm{cov}(e_{ckxi} ; e_{clyi}) \quad (23)$$

Les erreurs peuvent être décomposées en une erreur LO et une erreur HO.

$$\mathrm{cov}(x_i ; y_i) = \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{l=1}^{n_y} \mathrm{cov}(e_{ckxi,LO} + e_{ckxi,HO} ; e_{clyi,LO} + e_{clyi,HO}) \quad (24)$$

Par définition, les erreurs HO sont totalement indépendantes, il reste donc

$$\mathrm{cov}(x_i ; y_i) = \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{l=1}^{n_y} \mathrm{cov}(e_{ckxi,LO} ; e_{clyi,LO}) \quad (25)$$

Pour aller plus loin, il est nécessaire de connaitre les causes d'incertitude qui pourrait être communes entre l'étalon et le moyen. Il faut donc compléter le bilan classique des causes d'incertitude en introduisant une colonne permettant d'identifier la liste des causes communes.

Tableau 4. Exemple de bilan d'incertitude avec colonne cause commune

indice	Cause commune	…	Ecart type	L_k
C1X	CC1X	…	u_{c1x} ou u_{cc1x}	0%
C2X	CC2X	…	u_{c2x} ou u_{cc2x}	80%
C1Y		…	u_{c1y}	100%
C2Y	CC2Y	…	u_{c2y} ou u_{cc2y}	80%
C3Y	CC1Y	…	u_{c3y} ou u_{cc1y}	0%

Remarques :

- Les cause communes sont notées CCiX et CCiY. Le même indice i indique que les sources d'incertitude sont communes entre l'étalon (x) et le moyen (y).
- Les colonnes « indice » et « cause commune » n'ont pas de lien d'indice entre elles.
- Certaines causes d'incertitude peuvent ne pas être liées. Dans ce cas, la cause commune est vide.
- Des causes communes entre le moyen et l'étalon ont nécessairement la même valeur de Lk. En effet, Lk représente la variabilité de la même source d'incertitude pendant l'étalonnage.
- Les causes communes n'ont bien entendu pas les mêmes valeurs écarts-types u_{ccx} et u_{ccy}.
- Les écarts-types peuvent avoir 2 syntaxes de notation selon si elles sont utilisées pour la formule de covariance entre les niveaux ou entre le moyen et l'étalon. Bien entendu, la valeur reste la même dans les deux cas, il s'agit juste d'une notation pour simplifier les formules.

Les causes communes étant identifiées, la formule se simplifie

$$\mathrm{cov}(x_i ; y_i) = \sum_{k=1}^{n_{cc}} \mathrm{cov}(e_{cckxi,LO} ; e_{cckyi,LO}) \quad (26)$$

n_{cc} : nombre de sources d'incertitude communes

En normalisant les erreurs, l'équation devient

$$\mathrm{cov}(x_i ; y_i) = \sum_{k=1}^{n_{cc}} L_k u_{cckxi} u_{cckyi} \, \mathrm{cov}\left(\frac{e_{cckxi,LO}}{\sqrt{L_k u_{cckxi}^2}} ; \frac{e_{cckyi,LO}}{\sqrt{L_k u_{cckyi}^2}}\right) \quad (27)$$

Comme précédemment, la covariance de l'erreur normalisée est égale à 1. Cependant, il faut être attentif au sens de variation qu'induisent les phénomènes considérés. Par exemple, la température peut être une source commune entre l'étalon et le moyen. Mais la variation de température peut faire varier dans le même sens l'étalon et le moyen (dilatation de 2 pièces métalliques par exemple) ou bien dans en sens opposé. Ce sens de variation entre l'étalon et le moyen détermine le signe de la covariance. Il est nécessaire de le connaitre et donc d'ajouter une colonne au bilan d'incertitude. La colonne « sens de variation » indique si une variation du phénomène d'incertitude (par exemple température) engendre une variation dans le même sens de la source d'incertitude (par exemple dilatation ou rétractation de la pièce).

Tableau 5. Exemple de bilan d'incertitude avec sens de variation

indice	Cause commune	…	Ecart type	L_k	Sens variation
C1X	CC1X	…	u_{c1x} ou u_{cc1x}	0%	même
C2X	CC2X	…	u_{c2x} ou u_{cc2x}	80%	opposé
C1Y		…	u_{c1y}	100%	
C2Y	CC2Y	…	u_{c2y} ou u_{cc2y}	80%	même
C3Y	CC1Y	…	u_{c3y} ou u_{cc1y}	0%	même

A partir du sens de variation, il est possible de déduire le signe de la covariance entre l'étalon et le moyen. Si le sens de variation est le même pour les causes communes, la covariance est positive, sinon elle est négative. Cela peut être formalisé mathématiquement en introduisant le produit du « Signe » de la cause commune. Si le sens de variation est « même » le signe vaut +1, sinon il vaut -1.

L'équation devient

$$\operatorname{cov}(x_i\,;y_i)=\sum_{k=1}^{n_{cc}}L_k u_{cckxi}u_{cckyi}signe_{cckxi}signe_{cckyi} \qquad (28)$$

En introduisant comme dans le paragraphe précédent, le poids de l'incertitude de mesure, il vient

$$\operatorname{cov}(x_i\,;y_i)=u_{xi}u_{yi}\sum_{k=1}^{n_{cc}}L_k signe_{cckxi}signe_{cckyi}\sqrt{p_{cckxi}\,p_{cckyi}} \qquad (29)$$

Un raisonnement similaire peut être fait pour les covariances entre l'étalon et le moyen sur des niveaux différents

$$\operatorname{cov}(x_i\,;y_j)=u_{xi}u_{yj}\sum_{k=1}^{n_{cc}}L_k signe_{cckxi}signe_{cckyj}\sqrt{p_{cckxi}\,p_{cckyj}} \qquad (30)$$

2 Conclusion

La notion de covariance est bien souvent oubliée dans les bilans de causes d'incertitude. Cet article fournis 3 formules (19), (20) et (30) pour aborder ce concept. L'approche présentée se base sur un bilan classique de causes d'incertitude auquel il est ajouté 3 paramètres basés sur la connaissance de processus d'étalonnage,

- l'opportunité d'expression de la variance grâce au paramètre Lk
- l'indentification des causes communes d'incertitude entre le moyen et l'étalon
- l'identification de sens de variation des incertitudes

Il est alors possible de commencer à tenir compte de la covariance sans pour autant bouleverser les habitudes mais au contraire en les enrichissant de concepts déjà connus par les opérateurs mais formalisés pour en tenir compte dans les résultats.

L'article utilise l'étalonnage pour présenter la méthode, mais il est bien entendu possible d'utiliser ce principe dans d'autres cas que l'étalonnage.

Références

[1] *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure*, norme NF ENV 13005 (1999).

[2] J.M. Pou et D. Vaissière, Delta Mu, *La signature des processus d'étalonnage : les étalonnage vus sous l'angle statistique* , dans les actes du congrès de métrologie de Lyon (2005).

[3] Collège Français de Métrologie (CFM), guide technique *Application du nouveau concept d'étalonnage du VIM 3* (2012).