

# L'INCERTITUDE DE MESURE ET SON UTILISATION (PARTIE 2)

## ► L'utilisation des propriétés statistiques



► Par **Jean-Michel POU**, dirigeant fondateur de Delta Mu Conseil, président du GIE Quantum Network, directeur technique de BEA Métrologie, membre des comités de normalisation Afnor et ISO, membre du Collège français de métrologie.

Dans le premier article, nous avons vu que lorsqu'on "mélangeait" plusieurs phénomènes statistiques, le phénomène résultant se distribuait suivant une loi normale (sous réserve que les phénomènes soient non corrélés et de "force" à peu près égale). D'autre part, les statisticiens démontrent que la variance (carré de l'écart type) du phénomène global est égale à la somme des variances des phénomènes élémentaires qui le constituent.

### La méthode

Évaluer une incertitude de mesure, c'est identifier les différents facteurs qui y contribuent, les quantifier, par une méthode ou une autre, sous forme d'écart type, puis calculer l'écart type global, appelé écart type composé (noté  $u_c$ ), qui est la racine carrée de la somme des carrés des écarts types individuels.

$$u_c = \sqrt{ET_{\text{Facteur}1}^2 + ET_{\text{Facteur}2}^2 + ET_{\text{Facteur}3}^2 + \dots + ET_{\text{Facteur}N}^2}$$

La première opération consiste à **dresser le bilan des causes d'incertitude**. Certaines sont communes à tous les processus de mesure et leur évaluation devra toujours être faite.

► **L'erreur de lecture** : elle dépend de la quantification de l'instrument de mesure (écart entre deux lectures possibles, cet écart pouvant être inférieur à la résolution) ;

► **La répétabilité**<sup>(1)</sup> : aptitude d'un processus de mesure à répéter la même mesure. En général, elle est évaluée par une méthode de type A et l'écart type expérimental peut être estimé simplement. Attention néanmoins au nombre d'observations (de mesures) qui, s'il est trop petit (inférieur à 15), conduit à des écarts types sans grande signification !

Dans le cas où la répétition des mesures n'est pas possible (problème de coût par exemple), il conviendra d'évaluer cette composante par une méthode de type B en prenant en compte, par exemple, l'expérience des opérateurs chargés des mesures.

*Note* : On peut considérer que très souvent l'erreur de lecture participe à la répétabilité. En effet, chacune des observations permettant, dans une évaluation de type A, d'estimer l'écart type de répétabilité, est affectée par l'erreur de lecture qui se produit dans chaque mesure. Néanmoins, on peut imaginer le cas où la quantification de l'instrument de mesure est trop grande face aux autres variations possibles participant à la répétabilité. Ainsi, l'écart type de répétabilité serait égal à 0 (zéro) et ne prendrait pas en compte l'erreur de lecture.

En posant le principe selon lequel la lecture est dans la répétabilité, on risque dans certains cas, surtout dans ceux où elle est importante, de l'oublier ! On pourrait par exemple estimer que si l'écart type de répétabilité est différent de 0 (zéro), alors il "contient" la lecture, mais cette pratique n'est pas usuelle.

► **La reproductibilité interopérateur**<sup>(1)</sup> : la reproductibilité nécessite de faire varier l'un des facteurs du processus de mesure pour évaluer l'impact de ce facteur sur l'incertitude. L'expérience montre que l'opérateur, lorsqu'il participe réellement au processus, a souvent un rôle important dans l'incertitude et, par conséquent, que des opérateurs différents peuvent obtenir des résultats de mesure sensiblement différents (faire tangenter un trait, détecter une modification de couleur, effort de mesure, façon de faire...). Il est donc souvent nécessaire d'évaluer cette caractéristique pour estimer une incertitude de mesure représentative.

*Note* : De même, on pourrait envisager d'évaluer la reproductibilité inter-instrument (en faisant varier dans le processus l'instrument de mesure), la reproductibilité interenvironnement (en faisant varier dans le processus les conditions de mesure), la reproductibilité interméthode de mesure (en faisant varier dans le processus la méthode de mesure), etc.

Ce principe est utilisé dans le cadre de la série des normes ISO 5725 traitant des essais interlaboratoires. L'incertitude de mesure est ici évaluée par une "super-méthode" de type A dans laquelle la répétabilité est prise au sens large, comme étant la variation possible intralaboratoire (en faisant varier les opérateurs dans le laboratoire) et la reproductibilité interlaboratoire qui évalue la dispersion possible entre les laboratoires. Pour aller jusqu'à l'incertitude de mesure du processus étudié, il convient de vérifier qu'il n'existe pas de biais<sup>(1)</sup> dans le processus.

(1) Voir la première partie pour les définitions, Contrôles Essais Mesures n° 7, avril 2004, pp. 27-29.

En dehors de ces causes quasi systématiques, les processus de mesure sont également influencés par d'autres.

► **Causes provenant de l'environnement de la mesure :** les processus sont très souvent sensibles aux paramètres de l'environnement (température, pression, accélération de l'apesanteur, hygrométrie...). Évidemment, la connaissance des principes physiques liés à la mesure ainsi que celle des interactions entre les paramètres environnementaux et les caractéristiques de l'objet mesuré sont essentielles. La bibliographie peut donner des informations sur ce sujet (loi de dilatation des matériaux, poussée d'Archimède...), mais il est parfois nécessaire de réaliser des plans d'expérience pour les obtenir (vitesse d'une réaction chimique en fonction de la température ambiante, effet de la pression atmosphérique sur la célérité des ondes ultrasonores...).

Évidemment, les opérateurs habituellement chargés des mesures savent souvent implicitement quels sont les facteurs qui interagissent sur le processus (en été, les résultats sont toujours plus forts et lorsqu'il pleut, plus faibles...) et peuvent orienter efficacement les investigations.

► **Causes provenant de l'instrument de la mesure :** les instruments de mesure, quels qu'ils soient, sont imparfaits. Plusieurs types d'erreurs peuvent coexister dans un même instrument : des erreurs dites "de justesse" ou "d'indication" (dont on connaît rarement la part systématique qui pourrait être corrigée et la part aléatoire qui participe toujours, au final, à l'incertitude du processus), point commun de tous les instruments, et des erreurs plus spécifiques relevant de la technologie de l'instrument lui-même (hystérésis, parallélisme de touches...). Ces différentes causes d'erreur provenant de l'instrument sont évaluées lors de son étalonnage et figurent, en évaluation, sur les documents d'étalonnage. Si les documents issus de l'opération d'étalonnage ne comportent qu'une sanction (conforme ou non-conforme à une spécification : cas d'une vérification), alors les valeurs numériques utilisées pour l'évaluation de l'incertitude ne pourront être que les valeurs

Causes d'incertitude	Erreur maximale ( $\pm$ )	Loi de distribution	Écart type
Facteur 1	A	Normale ( $\approx$ 100 %)	a / 3
Facteur 2	/	/	b
Facteur 3	C	Uniforme	C / $\sqrt{3}$
Facteur 4	D	Normale ( $\approx$ 95 %)	d / 2
Facteur 5			
Facteur 6			
Facteur 7			
Facteur 8	J	Dérivée d'arc-sinus	j / $\sqrt{2}$
Facteur 9			
Facteur 10			
Facteur 11			

Figure 1 : modèle de présentation du bilan.

maximales données par la spécification (auxquelles il conviendra d'attribuer un modèle de distribution – évaluation de l'écart type par une méthode de type B). Même si la norme NF ENV 13005 (norme de référence internationale dans le domaine de l'évaluation des incertitudes de mesure), copie du GUM (*Guide pour l'expression des incertitudes de mesure*), préconise d'associer un modèle de distribution uniforme à des informations de ce type (conformité à une spécification), cela ne semble pas toujours opportun. En effet, en prenant la limite de spécification comme contributeur dans l'incertitude globale, le bilan est une première fois majoré (car l'erreur de l'instrument peut être inférieure à la limite de spécification qui représente le cas le plus défavorable !). En lui attribuant un modèle de distribution uniforme, il est une nouvelle fois majoré, car aucune raison physique ne justifie que cette erreur se distribue suivant un modèle uniforme plutôt qu'un autre sur l'étendue de mesure de l'instrument ! D'autre part, qu'il s'agisse d'un étalonnage ou d'une vérification, l'évaluation des erreurs de l'instrument passe par des opérations de mesure qui, elles-mêmes, sont imparfaites et donc entachées d'une incertitude (incertitude d'étalonnage). Ces incertitudes d'étalonnage participent donc également au bilan des causes d'incertitude du processus, soit comme un facteur à part entière, soit dans la limite de spécification (cas d'une vérification), sous réserve qu'elles aient été considérées lors de la déclaration de conformité (application de la norme ISO 14253-1 définissant les zones de conformité ou application d'un coefficient de

capabilité – rapport entre la spécification et l'incertitude d'étalonnage – qui permette de négliger l'incertitude d'étalonnage).

► **Causes provenant de l'objet à mesurer lui-même :** l'objet à mesurer n'est pas parfait et participe également à l'incertitude de mesure. S'il est facile de définir de façon théorique le diamètre d'un cercle, par exemple, il est plus difficile de mesurer le diamètre d'un "pata-toïde" (cas d'une pièce mécanique qui ne peut être un cercle parfait). De même, s'il s'agit de mesurer le taux d'un composant dans les fumées d'un incinérateur, le prélèvement réalisé n'est pas forcément représentatif des fumées globales. Il en est de même pour les essais destructifs où les échantillons ne représentent qu'une partie de la production ou enfin pour l'homogénéité d'une solution dont on cherche le titre *via* un prélèvement.

Note : dans le cas des essais destructifs, l'écart type de répétabilité peut "contenir" les variations liées à l'objet.

La seconde phase consiste donc à évaluer les écarts types correspondants aux causes identifiées pour évaluer, au final, l'écart type composé du processus de mesure.

Ce bilan peut se présenter (forme usuelle) comme un tableau à 4 colonnes (voir le modèle figure 1).

$$u_c = \sqrt{[(a/3)^2 + b^2 + (c/\sqrt{3})^2 + (d/2)^2 + \dots + (j/\sqrt{2})^2 + \dots]}$$

Note :  $u_c$  correspond, par hypothèse, à l'écart type d'une loi normale. L'erreur de mesure qui se produit au moment de

la mesure appartient donc à une loi de distribution normale, de moyenne égale à 0, et d'écart type  $u_c$ . La valeur vraie de l'objet mesuré (erreur de mesure = valeur mesurée - valeur vraie, soit valeur vraie = valeur mesurée + erreur de mesure, ce qui revient à additionner une loi de distribution à un scalaire) appartient par conséquent à une distribution normale, de moyenne égale à la valeur mesurée, et d'écart type  $u_c$ .

### La loi de propagation

Dans certains cas, ce n'est pas la mesure elle-même qui est intéressante mais son exploitation, parfois avec d'autres résultats de mesure, dans le cadre d'une formule qui conduit au paramètre recherché.

Dans ce cas, il existe un modèle ( $f$ ) qui lie les différents résultats de mesure ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ) de telle sorte que la caractéristique recherchée  $Y$  s'écrit :

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N).$$

Il est ici nécessaire de savoir comment les incertitudes respectives sur  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ , respectivement notées  $u_{x1}, u_{x2}, u_{x3}, \dots, u_{xN}$ , "se propagent" dans l'incertitude  $u_y$ .

Le problème posé peut se résumer graphiquement (voir figure 2).

Pour propager l'incertitude sur  $x_i$  dans l'incertitude sur  $Y$ , on considère que sur la plage de variation de  $x_i$  (incertitude sur  $x_i$ ), la fonction  $f$  est assimilable à sa tangente. Ainsi, la propagation de l'incertitude de  $x_i$  dans  $Y$  peut s'écrire :

$$u \text{ (dû à } x_i \text{ dans } y) = (df/dx_i) \times u_{xi}$$

En appliquant cette méthode à tous les paramètres mesurés ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ) et puisque ce sont les variances (carré de l'écart type) qui s'additionnent, on obtient :

$$u_Y^2 = [(df/dx_1) \times u_{x1}]^2 + [(df/dx_2) \times u_{x2}]^2 + \dots + [(df/dx_N) \times u_{xN}]^2$$

Cette relation est valable si les incertitudes de mesure sur  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$  sont indépendantes (non corrélées). Dans le cas contraire, il convient de considérer la corrélation entre les incertitudes et, par conséquent, les termes qui s'ajoutent à  $u_Y^2$  et qui s'écrivent pour chaque couple concerné ( $u_{xi}, u_{xj}$ ) sous la forme :  $2 \times (df/dx_i) \times (df/dx_j) \times \text{Cov}(u_{xi}, u_{xj})$  ou encore, en utilisant le coefficient de corrélation entre  $u_{xi}, u_{xj}$ , noté  $r_{ij}$  :

$$2 \times (df/dx_i) \times (df/dx_j) \times r_{ij} \times u_{xi} \times u_{xj}$$

$$\text{avec } r_{ij} = \text{Cov}(u_{xi}, u_{xj}) / (u_{xi} \times u_{xj})$$

*Note* : Il est souvent très difficile d'évaluer la corrélation entre deux incertitudes. Ainsi, il est intéressant de vérifier par simulation si une telle corrélation a une incidence sur l'incertitude sur  $Y$  en faisant varier le coefficient de corrélation entre 0 (incertitudes totalement indépendantes) et 1 (incertitudes totalement dépendantes). Dans le cas d'une incidence non négligeable, et seulement dans ce cas, il conviendrait de chercher à évaluer l'éventuelle covariance après s'être assuré qu'elle a une "existence" possible.

Les termes  $df/dx_i$  sont appelés **coefficient de sensibilité**. Ils ont évidemment une très grande importance dans la mesure où ils peuvent modifier de façon substantielle l'incidence de l'incertitude sur chaque paramètre. Une grande incertitude sur  $x_i$  peut être inconséquente dans  $Y$  alors qu'une petite incertitude sur  $x_i$  peut, à l'inverse, devenir une cause principale dans  $Y$  (voir figure 2).

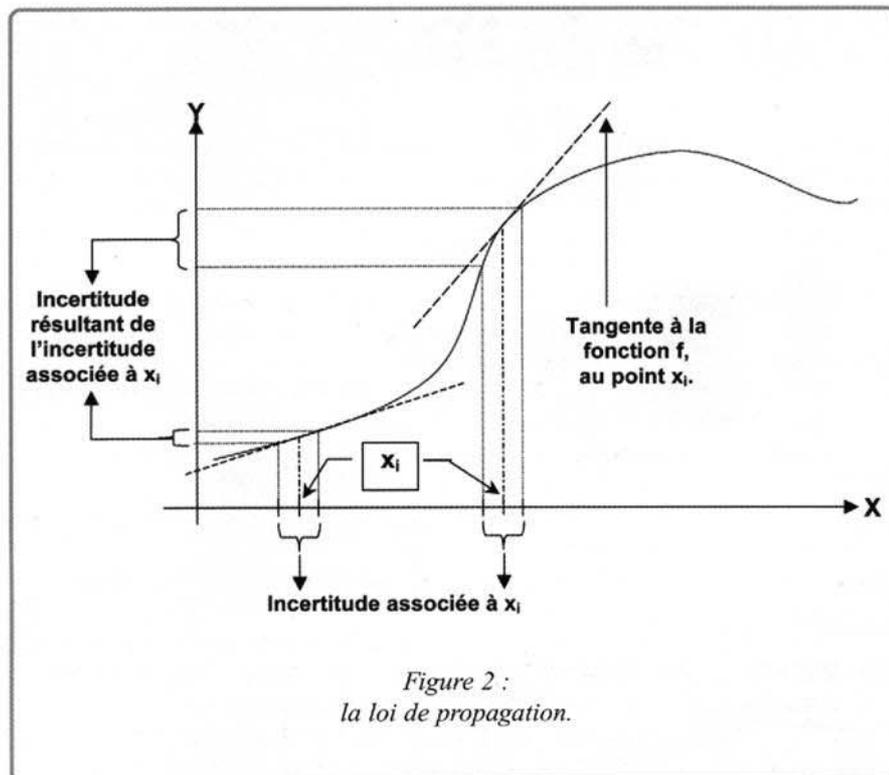


Figure 2 :  
la loi de propagation.

## CONTROLES ESSAIS-MESURES

➤ À paraître  
dans les prochains numéros :

Octobre 2004

### Les applications numériques

Plusieurs exemples seront abordés, du plus simple qui ne fait appel qu'à l'évaluation d'écart types individuels, à d'autres, plus compliqués, qui nécessitent l'utilisation de la loi de propagation ou de la simulation numérique.

Janvier 2005

### La capacité des processus de mesure

Cet article reprendra les principes de la norme ISO 14253-1 applicable, compte tenu de son statut, dans tous les systèmes qualité. Il reviendra sur les préconisations de l'ancienne norme française NF E 02-204, présentes par exemple, dans le MSA (*Measurement System Analysis*). Il présentera également un outil performant, s'appuyant sur la notion de risque client et risque fournisseur, décrit par une norme américaine (NCSL/ANSI Z540), qui permet de définir une stratégie pragmatique dans les cas où la capacité contractuelle ne peut être obtenue (incertitude de mesure trop grande devant la tolérance à vérifier).