



L'INCERTITUDE DE MESURE ET SON UTILISATION (PARTIE 3)

➤ Quelques applications numériques



➤ Par **Jean-Michel POU**, dirigeant fondateur de Delta M Conseil président du GIE Quantum Network, directeur technique de BEA Métrologie, membre des comités de normalisation Afnor et ISO, membre du Collège français de métrologie.

Dans les 2 premiers articles⁽¹⁾, nous avons vu la théorie des incertitudes de mesure et l'utilisation des propriétés statistiques des phénomènes pour les évaluer. Dans cette 3^e partie et la suivante, nous allons effectuer quelques applications numériques qui pourront servir d'exemples dans de nombreux domaines. Ils font appel aux méthodes traditionnelles de calcul (évaluation des écarts types et application de la loi de propagation), mais aussi aux méthodes de simulation numérique qui feront l'objet d'une annexe de la norme NF EN 13005 en cours d'approbation.

Incertain de mesure : exemple d'application

L'exemple sur lequel nous nous appuyons dans cet article est parfaitement théorique et les valeurs numériques utilisées sont totalement imaginaires. Il n'a pour simple objectif que celui de mettre en œuvre plusieurs techniques de calcul et de donner au lecteur un fil conducteur dans l'estimation des incertitudes.

Ainsi, nous allons imaginer que nous devons évaluer la quantité d'eau qui s'écoule, sur une période de temps, dans une canalisation de section rectangulaire de type canal. Le débit d'eau, au cours de la période, n'est pas constant et il est donc décidé de le mesurer périodiquement pour prendre en compte ses variations.

N'étant pas équipés de moyens de mesure spécifiques, nous avons à notre disposition 1 règle de 2 mètres et 5 expérimentateurs dotés uniquement de leur montre. Pour évaluer le débit du canal, nous utiliserons la propriété mathématique simple suivant laquelle le débit, noté D, est égal au produit de la section, notée S, et de la vitesse, notée V :

$$D = S \times V \quad (1)$$

La mesure de la section sera réalisée à

l'aide du réglet comme étant le produit de la largeur du canal, notée L, et de la hauteur d'eau au moment de la mesure, notée H.

Note : étant donné que le débit varie au cours de la période, la hauteur d'eau H devra être mesurée à chaque évaluation du débit D.

$$S = L \times H \quad (2)$$

La vitesse d'écoulement de l'eau sera, quant à elle, déterminée à l'aide d'une balle de ping-pong en mesurant le temps qu'elle met à parcourir une distance donnée. Pour être plus précis, nous décidons de positionner nos 5 expérimentateurs au bord du canal, à 2 mètres de distance l'un de l'autre (la capacité de notre réglet). Ils seront chargés de mesurer le temps qui s'écoule entre le top donné par le premier d'entre eux, placé en amont du canal, et le passage de la balle à leur repère respectif. Évidemment, le top est donné au passage de la balle devant le repère du premier expérimentateur. Il sera ainsi possible de porter sur un graphique les couples de valeurs obtenues (temps en abscisse, distance en ordonnée). La pente de la droite des moindres carrés qui passe par les points obtenus, notée V_s , représente la vitesse superficielle (en surface) d'écoulement.

La vitesse moyenne d'écoulement, notée V_m dans la section S, est ensuite calculée par la formule :

$$V_m = 1 / 0,8 \times V_s \quad (3)$$

Note : le coefficient $1 / 0,8 = 1,25$ est donné à $\pm 0,05$ par les hydroliciens.

Mesure de la largeur L et de la hauteur d'eau

Les mesures de L et de H sont effectuées à l'aide d'un réglet. La mesure de H sera faite à chaque évaluation de la vitesse, mais l'évaluation de son incertitude, comme celle sur L, ne sera réalisée qu'une seule fois, en début d'expérience. Comme nous l'avons vu dans les articles précédents, l'incertitude sur L provient de l'imperfection de tous les facteurs qui participent à la mesure de L.

L'incertitude à la lecture

Le réglet étant gradué en demi-millimètre, nous pouvons estimer que l'erreur de lecture est de l'ordre de la demi-graduation (soit 0,025 mm) et se distribue suivant une loi uniforme.

La répétabilité et la reproductibilité interopérateur

Pour évaluer ces paramètres, nous avons demandé aux 5 expérimentateurs de réaliser 15 fois chacun la mesure de L. Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau 1.

➤ **La répétabilité** : par habitude, on retient, pour écart type de répétabilité, le plus grand des écarts types obtenus. Néanmoins, d'un point de vue statistique, il serait possible de retenir l'écart

(1) Voir la 1^{re} partie "La mesure sous l'angle statistique", Contrôles Essais Mesures n° 7, avril 2004, pp. 27-29 et la 2^e partie : "L'utilisation des propriétés statistiques", Contrôles Essais Mesures n° 8, juillet 2004, pp. 25-28.

Tableau 1

	Expérimentateur 1	Expérimentateur 2	Expérimentateur 3	Expérimentateur 4	Expérimentateur 5
Moyenne	300,47	300,00	300,03	301,00	300,03
Écart type	0,30	0,00	0,23	0,19	0,13

type moyen si on estime que l'expérimentateur ne joue pas un rôle prépondérant sur ce facteur. En effet, la dispersion des écarts types observés peut provenir soit des opérateurs qui ont des performances différentes (cas dans lequel il conviendrait de retenir le plus grand), soit de l'effet dû à l'échantillonnage. En ne prenant que 15 mesures par expérimentateur, on ne peut accéder à l'écart type "vrai" du processus. Ainsi, en réalisant une autre série de 15 mesures avec l'un des opérateurs, on trouverait très probablement un écart type différent de la première série !

Note : il est possible, en utilisant les propriétés de la loi du Khi Deux (explication dans le prochain article), d'estimer les valeurs possibles de l'écart type "vrai" à partir du nombre de prélèvements (mesures) effectués.

Dans notre cas, et puisque l'utilisation d'un régllet ne requiert pas d'expérience particulière, on retiendra la moyenne des écarts types obtenus, c'est-à-dire 0,169 mm.

► **La reproductibilité interopérateur** : ce facteur représente l'écart lié à l'opérateur sur une mesure. On constate ici que les expérimentateurs trouvent en moyenne des largeurs différentes. L'écart type lié à ce facteur peut être déterminé simplement en calculant l'écart type des moyennes. On trouve ainsi 0,433 mm. Or, ce dernier est estimé sur la base de 5 valeurs uniquement (les 5 moyennes !). L'application de la loi du Khi Deux, pour un niveau de confiance de 90 %, permet d'établir l'inéquation suivante :

$$0,281 \leq \sigma \leq 1,027$$

On constate ici qu'un faible échantillonnage (5 expérimentateurs) conduit à une grande plage d'incertitude sur la valeur de l'écart type "vrai". Pour diminuer cette plage, il convient de multiplier les échantillons, mais ce n'est pas toujours facile !

L'incertitude liée au régllet

Nous possédons un certificat d'étalonnage du régllet. La lecture de ce dernier doit nous permettre d'évaluer l'erreur liée à la justesse du régllet.

Les écarts relevés sur les points d'étalonnage montrent que l'écart n'est pas systématique. Ainsi, lorsque la mesure est réalisée sur une graduation autre que celles ayant été observées lors de l'étalonnage, aucune correction ne sera possible (sauf à détecter une tendance dans les écarts qui pourrait être modélisée et permettre une correction de gain et/ou d'offset).

L'évaluation de type B préconise de prendre en considération l'erreur la plus grande (mais on ne sait pas ce qu'il en est des graduations non mesurées !) et de lui affecter une loi de distribution. Suivant cette approche, l'erreur à retenir serait donc -0,19 mm et de lui attribuer une loi de distribution qui, de toute évidence dans notre exemple, n'est pas uniforme. Puisque nous sommes loin d'avoir vu toutes les graduations, on peut supposer que l'écart maximum suit une loi normale à 95 % et qu'il convient donc de le diviser par deux pour le ramener à un écart type soit $0,19 / 2 = 0,095$ mm.

Note : l'écart type des écarts, qui peut représenter l'écart type recherché sous réserve qu'il n'y ait pas de tendance, vaut 0,102 mm !

L'incertitude d'étalonnage devra également être prise en compte ($\pm 0,02$ mm maximum à 2 écarts types).

L'incertitude liée à l'environnement

L'environnement affecte évidemment la mesure dans le sens où il agit sur le régllet et sur le canal. Néanmoins, et pour simplifier, nous considérerons que les mesures sont réalisées aux environs de 20 °C.

Note : cette approximation n'a pas de grandes conséquences, même si la température devait être différente, car les facteurs déjà évalués sont très importants devant l'impact de cette dernière.

L'objet mesuré

Les bords du canal ne sont pas strictement parallèles et la largeur réelle de la section est affectée par ce défaut. Nous considérerons que ce défaut est de l'ordre de 2 mm maximum distribué suivant une loi normale.

Pour la mesure de la hauteur d'eau dans le canal, les causes d'incertitude sont les mêmes sauf pour la répétabilité, qui est plus importante du fait de la fluctuation du niveau d'eau au moment de la mesure car la surface du canal présente de petites vaguelettes. Une série de 15 mesures réalisées par un opérateur a donné un écart type de 0,514 mm.

Incertaince sur la section S

D'après l'équation (2), la section est le produit de L par H. L'évaluation de l'incertitude sur cette dernière nécessite d'appliquer la loi de propagation :

$$u^2S = (dS/dH)^2 \times u^2H + (dS/dL)^2 \times u^2L + 2 \times (dS/dH) \times (dS/dL) \times u(H,L)$$

Le terme $u(H,L)$ représente la covariance entre la mesure de H et celle de L. On a considéré que l'environnement n'impactait pas la mesure. Dans le cas

Graduation (mm)	Valeur mesurée (mm)	Écart (mm)	Incertaince (mm)
0	0	0	0,01
10	10,04	0,04	0,01
50	49,98	-0,02	0,01
100	99,92	-0,08	0,01
200	200,11	0,11	0,01
500	500,07	0,07	0,01
700	699,89	-0,11	0,01
1 000	999,81	-0,19	0,02
1 500	1 500,05	0,05	0,02
2 000	2 000,13	0,13	0,02



Bilan des causes d'incertitude sur la mesure de L

	Erreur max	Loi	Écart type	Variance
Lecture	0,025	Uniforme	0,014	0,0002083
Répétabilité	/	/	0,169	0,0285610
Reproductibilité interopérateur	/	/	0,433	0,1874890
Incertitude liée au régle	0,19	Normale (95 %)	0,095	0,0090250
Incertitude d'étalonnage	0,02	Normale (95 %)	0,010	0,0001000
Objet mesuré	2	Normale (\approx 100%)	0,667	0,4444444
Somme des variances				0,6698278
Incertitude type ($\sqrt{\text{Somme des variances}}$)				0,818
Incertitude élargie en mm (95 %) : \pm				1,64

Bilan des causes d'incertitude sur la mesure de H

	Erreur max	Loi	Écart type	Variance
Lecture	0,025	Uniforme	0,014	0,0002083
Répétabilité	/	/	0,514	0,2641960
Reproductibilité interopérateur	/	/	0,433	0,1874890
Incertitude liée au régle	0,19	Normale (95 %)	0,095	0,0090250
Incertitude d'étalonnage	0,02	Normale (95 %)	0,010	0,0001000
Vaguelette	2	Normale (\approx 100%)	0,667	0,4444444
Somme des variances				0,9054628
Incertitude type ($\sqrt{\text{Somme des variances}}$)				0,952
Incertitude élargie en mm (95 %) : \pm				1,90

contraire, il aurait participé à cette covariance. De même, on a supposé que l'incertitude liée au régle, observée lors de son étalonnage, n'avait pas de caractère systématique.

Elle ne participe donc pas à la covariance. Pour finir, si l'opérateur qui mesure H n'est pas forcément celui qui a mesuré L, alors la reproductibilité interopérateur n'entre pas non plus dans la covariance.

Fort de toutes ces hypothèses, on peut considérer que le terme de covariance est nul. Ainsi, l'incertitude sur la section se calcule :

- $u^2S = (L)^2 \times u^2H + (H)^2 \times u^2L$
- $u^2S = 300^2 \times 0,952^2 + 100^2 \times 0,818^2 = 88\,189$
- $uS = \sqrt{88\,189} = 297 \text{ mm}^2$

La section du canal, pour une hauteur d'eau de 100 mm, vaut donc :

$$S = (30\,000 \pm 594) \text{ mm}^2$$

Dans la prochaine partie, nous évaluerons l'incertitude sur la vitesse puis sur la quantité d'eau écoulée sur la période.

RESPONSABLE MÉTROLOGIE

Développez vos compétences

*L'organisation de la fonction,
l'utilisation et la maîtrise des techniques.*
Cycle de formation de 11 jours répartis sur 4 modules.

À l'issue de ce cycle, vous saurez :

- Rationaliser votre parc d'équipements de mesure.
- Garantir la fiabilité de la mesure.
- Assurer la maîtrise de l'externalisation de tout ou partie de la métrologie.
- Définir et maîtriser votre processus de mesure au sein de votre organisme.
- Appliquer les techniques statistiques au service de votre métrologie.
- Estimer les incertitudes de mesures et valider vos méthodes d'analyse.

Contactez nos équipes commerciales :

Paris : Claudie Chervy au (0)1 41 62 82 27

Lyon : Sylvie Lorin au (0)4 72 61 69 05

Découvrez les autres formations Métrologie
et Techniques de laboratoire proposées par CAP AFNOR sur notre site :
www.boutique-formation.afnor.fr

CAP//AFNOR

Construire et Accompagner votre Performance

CYCLE DE FORMATION
2005