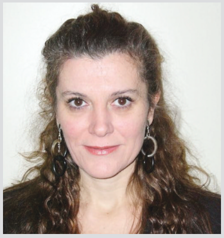
La covarianza nella stima dell'incertezza di misura

Prima parte



THE PAGE OF SMART METROLOGY

Deltamu Italia is one of the leading permanent partners of the Journal, it brings together a group of experts in metrology that share an innovative vision of the profession, so that it is a carrier of added value in companies and in laboratories. Smart Metrology by Deltamu is a metrology that can adapt to all types of industrial facilities, from SMEs to international groups, an opportunity to gradually move from the Metrology of measurement equipment to the Metrology of processes.

RIASSUNTO

Deltamu Italia è un collaboratore stabile della Rivista, riunisce un insieme di esperti in Metrologia che condividono una visione innovatrice della professione, affinché sia portatrice di valore aggiunto in azienda e nei laboratori. La Smart Metrology di Deltamu è una metrologia in grado di adattarsi a tutti i tipi di strutture industriali, dalla PMI ai gruppi internazionali, un'opportunità per passare gradualmente dalla Metrologia degli strumenti alla Metrologia dei processi.

È consuetudine analizzare un processo di taratura stabilendo un bilancio d'incertezza, cioè seguendo la procedura raccomandata dalla Guida all'espressione dell'incertezza nella misurazione (GUM) e i suoi supplementi [1], [2], [3]. Secondo questi documenti e sulla base delle definizioni fornite dal Vocabolario Internazionale di Metrologia (VIM) [4] è necessario elencare tutte, o almeno la maggior parte, delle sorgenti d'incertezza individuate, dopo di che le diverse componenti vengono raggruppate in una opportuna tabella e ognuna viene quindi quantificata utilizzando una metodologia di valutazione di Tipo A o di Tipo B.
Successivamente le diverse valutazioni d'incertezza devono essere combinate in modo quadratico, secondo una ben nota Legge di propagazione, ed espresse utilizzando l'incertezza standard combinata o la loro varianza.
In ambito industriale, in generale l'incertezza di taratura viene dedotta sommando in varianza le varie incertezze standard individuate; effettuando questo passaggio, spesso tra le cause dell'incertezza ci si dimentica di prendere in considerazione la covarianza, cioè di valutare correttamente la loro interdipendenza, come invece viene espressamente richiesto dai documenti sopra citati.
Nella realtà infatti le covarianze giocano un ruolo molto significativo nella valutazione dell'incertezza di misura, inclusi ad esempio (ma non solo) i confronti interlaboratorio [5] così importanti per la valutazione della "performance" degli operatori e per garantire il mantenimento delle competenze.
Tuttavia, il fatto che in generale le covarianze non siano sempre facili da individuare e da valutare e che i metodi matematici disponibili (es [6] e [7]) seppure rigorosi siano spesso complessi e di difficile applicazione, fa sì che si tenda a trascurarle o quanto meno a fornirne una valutazione molto approssimativa. Tutto ciò determina di conseguenza una stima dell'incertezza non adeguata e dunque inaffidabile.
L'intento è allora in questa sede quello di mostrare un metodo che, attraverso un'attenta analisi del bilancio d'incertezza di un processo di taratura (misura), consenta di ottenere una stima ragionevole della covarianza attraverso un modello di decomposizione dell'errore basato sul tasso di variazione dell'errore medesimo nel processo di misurazione.

Scenario

Una generica quantità Y dipende normalmente da k altre quantità (X_1, …, X_k), che possono essere misurate dallo stesso oppure anche da diversi processi di misurazione e sono influenzate da un certo numero di grandezze d'influenza.
Supponiamo che Y possa essere valutato attraverso un modello di misurazione (procedura di taratura) noto f a cui sarà associato un possibile errore di modello ε, con media nulla ($\mu(\varepsilon) = 0$), indipendentemente da qualsiasi X_i, $\forall i$, $1 \le i \le k$. La generica quantità Y di nostro interesse allora andrebbe espressa come segue:

$$Y = f(X_1, \ldots, X_k) + \varepsilon$$

L'espressione corretta di Y richiede pertanto che venga fornito il suo valore più probabile (la media) e l'incertezza standard. Poiché Y è espressa mediante diverse grandezze d'ingresso, per ciascuna di esse è necessario esaminare la gamma di probabili variazioni e, se possibile, la legge di distribuzione associata. In quest'analisi, si desidera stabilire una valutazione d'incertezza che sia rappresentativa di tutte le tarature eseguite per un determinato tipo di strumento, poiché in generale non si ha l'intenzione di ripetere una valutazione d'incertezza a ogni taratura, ma si preferisce invece applicare di volta in

Direttore tecnico-commerciale – Deltamu Italia srl
alazzari@deltamu.com

volta il modello messo a punto in seguito all'analisi e allo studio del proprio processo.
In effetti, occorre tenere presente principalmente due aspetti:
– Alcuni degli effetti che contribuiscono all'incertezza non hanno necessariamente avuto il tempo di "esprimersi" totalmente, vale a dire, di mutare su tutta la loro gamma di possibili variazioni durante la durata della taratura: in genere eseguire una taratura è un'operazione che non dura molto a lungo e alcuni effetti variabili nel lungo termine non si manifestano durante il processo di taratura (si pensi ad esempio all'effetto inter-operatore quando si esegue la taratura di uno strumento). Di conseguenza tali effetti nel breve termine possono venir interpretati come degli errori sistematici che non dovrebbero essere attribuiti allo strumento, come a volte invece erroneamente si fa.
– Altre cause d'incertezza sono intimamente legate le une alle altre e variano insieme durante la misurazione: alcune di esse possono essere comuni sia al campione che allo strumento da tarare (ad esempio la temperatura del campione e dello strumento). Questo fenomeno di cause comuni può aumentare o diminuire la dispersione apparente dei risultati di taratura. Ancora una volta dunque, occorre fare attenzione a non attribuire questa variazione allo strumento.
Tali due fenomeni sono matematicamente modellati dalla covarianza: nel primo caso si tratta della covarianza tra le incertezze su risultati di misura successivi, mentre nel secondo caso della covarianza tra fonti d'incertezza correlate. La GUM impone di tener conto delle covarianze nella stima dell'incertezza di misura (cfr. Cap. 8, §4).
Lo scopo del lavoro illustrato qui di seguito e propugnato da Deltamu è di proporre un metodo pratico per calcolare queste covarianze durante la taratura, basato sui concetti di "*varianza ad alta opportunità*" (HO) e di "*varianza a bassa opportunità*" (LO).

Stato dell'arte

Il fenomeno della covarianza nella misurazione è ovviamente affrontato in letteratura. La stessa GUM propone una formula per considerare la covarianza nella valutazione dell'incertezza di misura:

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\mathrm{cov}(x_i,x_j) \qquad (1)$$

Una covarianza esprime la variazione simultanea (correlata) degli errori di misura relativi a due quantità. È positiva quando la variazione di una variabile implica una variazione nella stessa direzione dell'altra variabile; è invece negativa quando la variazione dell'altra variabile è nella direzione opposta.
La covarianza modella matematicamente gli effetti sull'incertezza di misura (che sono sempre sconosciuti) delle quantità d'influenza che sono in comune con due grandezze X_i e X_j, totalmente o parzialmente. Come detto, la sua valutazione non è facile, specialmente quando gli effetti considerati non sono totalmente correlati.
Qui di seguito, vengono utilizzate le stesse notazioni proposte nella GUM §4.1, cioè lo stimatore della grandezza X_i viene denotato con x_i. È tuttavia necessario comprendere che con la notazione cov(x_i, x_j), si cerca di esprimere la covarianza tra gli errori su x_i e x_j e non tra le loro grandezze. In effetti, le quantità X_i e X_j possono essere correlate senza che però lo siano gli errori con cui vengono misurate. Ad esempio, le quantità di corrente e tensione sono correlate dalla legge di Ohm, ma non necessariamente lo sono gli errori commessi nel misurarle. D'altra parte, questo cattivo uso di notazione è comunque abbastanza accettabile nel caso di una taratura, perché si considera la misurazione a un dato livello presumibilmente noto e si è interessati implicitamente solo all'errore.
Per stimare questa covarianza, la GUM [1] propone 3 strategie.
1. Coefficiente di correlazione: la GUM (§ 5.2.2) propone di utilizzare il concetto di coefficiente di correlazione

$$r(x_i,x_j)=\frac{\mathrm{cov}(x_i,x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \qquad (2)$$

Da qui la (1) può essere riscritta come:

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}r(x_i,x_j)u(x_i)u(x_j) \qquad (3)$$

Questa funzione ha il vantaggio, rispetto alla valutazione della covarianza, di avere un significato fisico interpretabile. In effetti, il coefficiente di correlazione si evolve in intervalli compresi tra –1 e 1, dove lo 0 indica una totale indipendenza tra le variabili, mentre il valore 1 (o –1) una correlazione completa positiva (o negativa).
La GUM ne presenta un esempio di utilizzo solo quando la correlazione è totale, vale a dire quando r assume valore 1 (o –1).

2. Sperimentale: la GUM (§ 5.2) propone anche di valutare sperimentalmente la covarianza.

$$\mathrm{cov}(x_i,x_j)=\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_{i,k}-\bar{x}_i)(x_{j,k}-\bar{x}_j)}{n-1} \qquad (4)$$

Ma in realtà raramente è possibile valutare sperimentalmente la covarianza, specialmente su misure che non sono simultanee (ad esempio covarianza tra campioni di diversi livelli). Inoltre, anche quando il calcolo fosse possibile, il valore ottenuto sarebbe in realtà solo uno stimatore della covarianza e quindi con un dato livello di confidenza a seconda del numero di campioni utilizzati nell'operazione di taratura. La covarianza nella stima della incertezza di misura.

Varianza HO e LO

Durante la taratura, alcune fonti d'incertezza non hanno il tempo (l'opportunità) di variare. Assumono un valore (sconosciuto) all'inizio dell'operazione e mantengono questo valore fino alla fine. Queste fonti d'incertezza si comportano cioè quasi come errori sistematici durante la taratura. Questo fenomeno è modellato dalla covarianza tra le incertezze su risultati di misura successivi (cfr. il primo dei due casi visti precedentemente, a)). La nozione di covarianza equivale quindi a chiederci se durante il periodo di taratura la fonte d'incertezza abbia avuto o meno il tempo di "esprimersi", di variare e, in caso affermativo, in quale proporzione relativamente al suo intervallo di variazione.

Una soluzione per formalizzare questa situazione è stata proposta in un articolo del Congresso di Metrologia di Lione nel 2005 [8], poi ripreso nella guida tecnica della CFM [9]. Essa si basa sull'esperienza per caratterizzare la stabilità della fonte d'incertezza durante l'operazione di taratura. Alcune sorgenti che hanno una forte opportunità di variare, si indicano con HO ("High Opportunity" - "Alta Opportunità") e altre invece che variano poco o nulla, sono chiamate LO ("Low Opportunity" - "Bassa Opportunità").

Da questa prospettiva dunque, riprendendo in considerazione gli esempi fatti più sopra relativamente alle quantità d'influenza comune, si deduce che:

– per la temperatura è possibile affermare che essa ha una bassa opportunità (LO) di esprimere le sue variazioni durante il processo di misurazione e pertanto, la covarianza dovrebbe assumere valori diversi da zero solo a causa degli effetti delle quantità d'influenza di tipo LO;

– viceversa per il rumore è possibile affermare che esso ha una "Alta opportunità (HO)" di esprimere le sue variazioni durante il processo di misurazione e pertanto, la covarianza può essere considerata nulla solo a causa degli effetti delle quantità d'influenza di tipo HO.

Viene dunque associato alla fonte d'incertezza un coefficiente, denominato L_k, che ne quantifica la stabilità durante il periodo di taratura. Esso è espresso in percentuale e viene utilizzato come segue:

– L_k = 100%: indica sorgenti a debole opportunità. La sorgente d'incertezza rimane stabile al 100% per la durata della taratura, cioè non varia. Questa è in genere l'incertezza inter-operatore in un'operazione di taratura. In effetti, è il medesimo operatore che esegue tutte le misurazioni di taratura, di conseguenza la dispersione tra operatori non può essere espressa;

– L_k = 0%: indica una sorgente a forte (alta) opportunità. La sorgente d'incertezza rimane stabile allo 0%, vale a dire che non è affatto stabile e, al contrario, assume tutti i valori possibili durante il periodo di taratura. Questa è tipicamente la ripetibilità.

Ci sono poi dei casi intermedi, per esempio:

– L_k = 75%: indica un fenomeno che rimane stabile al 75%, cioè che varia solo nel 25% del suo intervallo di variazione. Questo esempio può corrispondere alla sorgente d'incertezza causata dalla temperatura in una stanza con aria condizionata a 20 ± 2 ° C. Infatti, durante la durata di una taratura relativamente breve, possiamo considerare che la temperatura possa spostarsi solo di 1 °C, cioè appunto solo il 25% del suo intervallo di variazione pari a ± 2 °C. Pertanto, si afferma che è rimasta stabile al 75%.

La valutazione di L_k si basa sulla conoscenza e sull'esperienza acquisita nel processo studiato. Questa valutazione può sembrare arbitraria, ma segue la stessa strategia della GUM quando essa propone di scegliere la legge di distribuzione e l'ampiezza della variazione per ottenere la valutazione della deviazione standard in base al metodo di Tipo B. Inoltre, è più "fisica" della determinazione della legge di distribuzione, spesso pericolosa.

Nei prossimi articoli vedremo come questa formalizzazione viene utilizzata per stimare le covarianze nel processo di taratura.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] UNI CEI 70098-3:2016 – "Incertezza di misura - Parte 3: Guida all'espressione dell'incertezza di misura". JCGM 100:2008, *Evaluation of Measurement Data - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM 1995 with minor corrections), Joint Committee for Guides in Metrology, 2008.[Online]. Disponibile in: **www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html**.

[2] JCGM 101:2008, Evaluation of Measurement Data - Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement - Propagation of distributions using a Monte Carlo method, Joint Committee for Guides in Metrology, 2008. [Online]. Disponibile in: **www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html**.

[3] JCGM 102:2011, Evaluation of Measurement Data - Supplement 2 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement - Extension to any number of output quantities, Joint Committee for Guides in Metrology, 2011. [Online]. Disponibile in: **www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html**.

[4] JCGM 200:2012, *International Vocabulary of Metrology - Basic and General Concepts and Associated Terms* (VIM 2008 with minor corrections), Joint Committee for Guides in Metrology, 2012. [Online] Disponibile in: **www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html**.

[5] M. Bergoglio, A. Malengo, and D. Mari, "Analysis of interlaboratory comparisons affected by correlations of the reference standards and drift of the travelling standards", *Measurement*, vol. 44, no. 8, pp. 1461-1467, 2011. [Online]. Disponibile in: **www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224111001680**.

[6] P.D. Hale, A. Dienstfrey, J.C.M. Wang, D.F. Williams, A. Lewandowski, D.A. Keenan, and T.S. Clement, "Traceable waveform calibration with a covariance-based uncertainty analysis," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 58, no. 10, pp. 3554- 3568, Oct. 2009.

[7] D.A. Humphreys, P.M. Harris, M. Rodrguez-Higuero, F. A. Mubarak, D. Zhao, and K. Ojasalo, "Principal component compression method for covariance matrices used for uncertainty propagation", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 64, no. 2, pp. 356-365, Feb. 2015.

[8] J.M. Pou, D. Vaissière, Delta Mu, La signature des processus d'étalonnage : les étalonnage vus sous l'angle statistique, *Actes du Congrès International de Métrologie*, Lione, 2005.

[9] Collège Français de Métrologie (CFM), guide technique Application du nouveau concept d'étalonnage du VIM 3 (2012).