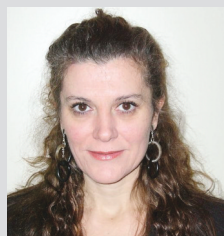


La covarianza nella stima dell'incertezza di misura

Seconda parte



THE PAGE OF SMART METROLOGY

Deltamu Italia is one of the leading permanent partners of the Journal, it brings together a group of experts in metrology that share an innovative vision of the profession, so that it is a carrier of added value in companies and in laboratories. Smart Metrology by Deltamu is a metrology that can adapt to all types of industrial facilities, from SMEs to international groups, an opportunity to gradually move from the Metrology of measurement

equipment to the Metrology of processes.

RIASSUNTO

Deltamu Italia è un collaboratore stabile della Rivista, riunisce un insieme di esperti in Metrologia che condividono una visione innovatrice della professione, affinché sia portatrice di valore aggiunto in azienda e nei laboratori. La Smart Metrology di Deltamu è una metrologia in grado di adattarsi a tutti i tipi di strutture industriali, dalla PMI ai gruppi internazionali, un'opportunità per passare gradualmente dalla Metrologia degli strumenti alla Metrologia dei processi.

sintetizzate in una tabella simile alla Tab. 1.

È stata aggiunta la colonna "Indice" in modo da identificare la sorgente d'incertezza mediante un contrassegno che ne consenta l'uso nelle formule utilizzate di seguito. I contrassegni impiegati sono:

CiX = i -esima causa d'incertezza sulla conoscenza di X ,

$i \in [1; n_x]$, dove n_x è il numero totale di sorgenti d'incertezza individuate per X ,

CiY = i -esima causa d'incertezza sulla conoscenza di Y ,

$i \in [1; n_y]$, dove n_y è il numero totale di sorgenti d'incertezza individuate per Y .

Si noti che le sorgenti d'incertezza possono dipendere dal livello al quale viene eseguita la taratura. La deviazione standard risultante può quindi avere una parte variabile a seconda del livello.

Covarianza

La sopra menzionata Tab. 1 soddisfa la necessità di calcolare l'incertezza quando le cause d'incertezza sono indipendenti. Il nostro proposito è invece ora quello di proporre un metodo per completare la precedente tabella e consentire la valutazione delle covarianze, allo scopo di perfezionare la matrice di varianza-covarianza impiegata per l'utilizzo dei risultati di taratura, in particolare per la stima della curva di taratura secondo i metodi proposti dalla guida CFM [3].

La matrice di varianza-covarianza è riportata in Tab. 2:

Direttore tecnico-commerciale – Deltamu Italia srl
alazzari@deltamu.com

LA COVARIANZA NELLA STIMA DELL'INCERTEZZA DI MISURA II PARTE

Continuando nel nostro studio relativo alla covarianza nella stima dell'incertezza di misura, riprendiamo dalla formalizzazione operata nell'articolo del numero precedente per stimare le covarianze nel processo di taratura.

Ci occupiamo innanzitutto della **Modellizzazione**.

Bilancio delle cause classiche

Una taratura è un confronto tra il valore del campione, indicato con x per il seguito, e il valore misurato dello strumento, indicato con y .

Quando si stima l'incertezza di misura, usando il metodo della GUM [1], [2], le informazioni sono solitamente

Tabella 1 – Esempio di bilancio d'incertezza

| Indice | Causa di incertezza | Tipo | Ampiezza di variazione | Legge di distribuzione | Scarto tipo |
|--------|---------------------|------|------------------------|------------------------|-------------|
| $C1X$ | Taratura | B | 0,02 | Normale | u_{c1x} |
| $C2X$ | ... | | | | u_{c2x} |
| $C1Y$ | Ripetibilità | A | - | | u_{c1y} |
| $C2Y$ | Risoluzione | B | 0,1 | Rettangolare | u_{c2y} |
| $C3Y$ | ... | | | | u_{c3y} |

Tabella 2 – Esempio di matrice varianza-covarianza
 x_i : stima del campione per i diversi livelli i
 y_i : stima fornita dallo strumento per il campione al livello i
 u_{x_i} : incertezza sulla conoscenza del campione di livello i , valutata con un metodo GUM classico.
 u_{y_i} : incertezza sul valore fornito dallo strumento al livello i , valutata con un metodo GUM classico.
 $cov(\dots)$: covarianza tra le grandezze

| | | | | |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | X1 | X2 | Y1 | Y2 |
| X1 | u_{x1}^2 | $cov(x_1, x_2)$ | $cov(x_1, y_1)$ | $cov(x_1, y_2)$ |
| X2 | $cov(x_2, x_1)$ | u_{x2}^2 | $cov(x_2, y_1)$ | $cov(x_2, y_2)$ |
| Y1 | $cov(y_1, x_1)$ | $cov(y_1, x_2)$ | u_{y1}^2 | $cov(y_1, y_2)$ |
| Y2 | $cov(y_2, x_1)$ | $cov(y_2, x_2)$ | $cov(y_2, y_1)$ | u_{y2}^2 |

La covarianza deriva da due diversi fenomeni fisici.

1. Le covarianze tra le misurazioni effettuate a diversi livelli, provengono da fonti d'incertezza che non variano (o variano poco) nel tempo sulle diverse misurazioni durante la taratura (tipicamente l'operatore).
2. Le covarianze tra il campione e lo strumento rappresentano le fonti d'incertezza che sono legate al momento della misurazione. In genere, indipendentemente dalla temperatura, sarà la stessa per il campione e lo strumento.

COVARIANZA TRA I LIVELLI

Questa sezione presenta un metodo per determinare la covarianza tra i livelli, cioè i termini $cov(x_i, x_j)$ o $cov(y_i, y_j)$. La tabella del bilancio delle cause dell'incertezza dovrebbe essere integrata con la nozione di varianza LO e HO descritta nel precedente articolo, aggiungendo una colonna per il parametro L_k alla Tab. 1, come indicato in Tab. 3.

Inizialmente, lo studio viene eseguito sulla covarianza sul campione x .

Tabella 3 – Esempio di bilancio d'incertezza con la colonna L_k

| Indice | Causa di incertezza | Tipo | Ampiezza di variazione | Legge di distribuzione | Scarto tipo | L_k |
|--------|---------------------|------|------------------------|------------------------|-------------|-------|
| C1X | Taratura | B | 0,02 | Normale | u_{c1x} | 0% |
| C2X | ... | | | | u_{c2x} | 80% |
| C1Y | Ripetibilità | A | - | | u_{c1y} | 100% |
| C2Y | Risoluzione | B | 0,1 | Rettangolare | u_{c2y} | 80% |
| C3Y | ... | | | | u_{c3y} | 0% |

Un risultato di misurazione può essere modellato come segue:

$$x_i = x_{vcvi} + \sum_{k=1}^{n_x} e_{ckxi} \quad (1)$$

x_i : valore nominale del campione al livello i ;
 x_{vcvi} : valore convenzionalmente vero (non noto) del campione per il livello i ;
 e_{ckxi} : errore sul campione di livello i a causa della sorgente d'incertezza k ;
 n_x : numero di sorgenti d'incertezza utilizzate per il campione.

La covarianza tra due campioni x_i e x_j è data da:

$$cov(x_i; x_j) = cov(x_{vcvi} + \sum_{k=1}^{n_x} e_{ckxi} + \sum_{k=1}^{n_x} e_{ckxj}) \quad (2)$$

Data la proprietà della covarianza rispetto all'addizione (bilinearità della covarianza) e la covarianza con una costante pari a zero, risulta:

$$cov(x_i; x_j) = \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{l=1}^{n_x} cov(e_{ckxi}; e_{clxj}) \quad (3)$$

Le cause dovrebbero essere indipendenti l'una dall'altra per il campione. Questa è un'ipotesi semplificativa ma realistica. Tuttavia, è possibile tenere conto dei possibili collegamenti tra le sorgenti d'incertezza del campione, ma questo complica la presentazione (cfr. introduzione di cause comuni di variazione presentate più sotto)

$$cov(x_i; x_j) = \sum_{k=1}^{n_x} cov(e_{ckxi}; e_{ckxj}) \quad (4)$$

L'errore durante l'operazione di taratura può essere scomposto in un errore LO, corrispondente alla frazione stabile dell'errore durante la taratura, e un errore HO corrispondente alla parte totalmente variabile.

$$e_{ckxi} = e_{ckxi,LO} + e_{ckxi,HO} \quad (5)$$

Sostituendo nell'equazione (4), risulta:

$$cov(x_i; x_j) = \sum_{k=1}^{n_x} cov(e_{ckxi,LO} + e_{ckxi,HO}; e_{ckxj,LO} + e_{ckxj,HO}) \quad (6)$$



$$\text{cov}(x_i; x_j) = \sum_{k=1}^{n_x} \begin{bmatrix} \text{cov}(e_{ckxi,LO}; e_{ckxj,LO}) \\ + \text{cov}(e_{ckxi,LO}; e_{ckxj,HO}) \\ + \text{cov}(e_{ckxi,HO}; e_{ckxj,LO}) \\ + \text{cov}(e_{ckxi,HO}; e_{ckxj,HO}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Per definizione, gli errori HO sono completamente indipendenti, quindi

$$\text{cov}(x_i; x_j) = \sum_{k=1}^{n_x} \text{cov}(e_{ckxi,LO}; e_{ckxj,LO}) \quad (8)$$

La deviazione standard dell'errore e_{ckxi} e quindi l'incertezza della causa ck possono essere scomposti in una parte LO e HO

$$u_{ckxi}^2 = L_k u_{ckxi,LO}^2 + (1 - L_k) u_{ckxi,HO}^2 \quad (9)$$

Normalizzando l'errore,

$$\text{cov}(x_i; x_j) = \sum_{k=1}^{n_x} \text{cov}\left(\sqrt{L_k} \frac{e_{ckxi,LO}}{u_{ckxi,LO}}; \sqrt{L_k} \frac{e_{ckxj,LO}}{u_{ckxj,LO}}\right) \quad (10)$$

$$\text{cov}(x_i; x_j) = \sum_{k=1}^{n_x} L_k u_{ckxi} u_{ckxj} \text{cov}\left(\frac{e_{ckxi,LO}}{u_{ckxi,LO}}; \frac{e_{ckxj,LO}}{u_{ckxj,LO}}\right) \quad (11)$$

Sapendo che, per definizione, le variazioni di LO sono stabili durante la taratura, la loro covarianza standardizzata è uguale a 1.

$$\text{cov}(x_i; x_j) = \sum_{k=1}^{n_x} L_k u_{ckxi} u_{ckxj} \quad (12)$$

Si noti che, in questo caso, il coefficiente L_k è simile al coefficiente di correlazione r definito nella formula generalizzata della GUM [1].

Durante un bilancio delle cause d'incertezza, è interessante conoscere l'impatto di una causa d'incertezza sull'incertezza totale. Possiamo allora introdurre la nozione di peso della causa dell'incertezza in relazione all'incertezza definito da:

$$P_{ckxi} = \frac{u_{ckxi}^2}{u_{xi}^2} \quad (13)$$

dove:

$$u_{ckxi} = u_{xi} \sqrt{P_{ckxi}} \quad (14)$$

P_{ckxi} : peso della causa dell'incertezza k rispetto all'incertezza sul campione al livello i (moltiplicato per 100 per avere il peso in percentuale);

u_{ckxi} : incertezza della causa k sul campione di livello i ;

u_{xi} : incertezza totale sul campione al livello i .

Si noti che la somma dei pesi del bilancio d'incertezza è pari a 1 (100%)

Pertanto la covarianza tra i campioni durante la taratura può essere ottenuta con la seguente formula:

$$\text{cov}(x_i; x_j) = u_{xi} u_{xj} \sum_{k=1}^{n_x} L_k \sqrt{P_{ckxi} P_{ckxj}} \quad (15)$$

La covarianza tra i risultati dello strumento di misura può essere calcolata in modo simile:

$$\text{cov}(y_i; y_j) = u_{yi} u_{yj} \sum_{k=1}^{n_y} L_k \sqrt{P_{ckyi} P_{ckyj}} \quad (16)$$

COVARIANZA TRA IL CAMPIONE E LO STRUMENTO

Qui di seguito viene presentato un metodo per determinare la covarianza tra il campione e lo strumento per un dato livello, cioè i termini $\text{cov}(x_i, y_j)$.

L'inizio del ragionamento è simile a quello fatto precedentemente. Un risultato di misurazione può essere modellato come segue:

$$x_i = x_{vcvi} + \sum_{k=1}^{n_x} e_{ckxi}; \quad y_j = y_{vcvj} + \sum_{k=1}^{n_y} e_{ckyj} \quad (17)$$

dove:

x_i, y_j : valore nominale al livello i ;

x_{vcvi}, y_{vcvj} : valore convenzionalmente vero (non noto) per il livello i ;

e_{ckxi}, e_{ckyj} : errore al livello i a causa della sorgente d'incertezza k ;

n_x, n_y : numero di sorgenti d'incertezza considerate.

La covarianza tra campione x_i e strumento y_j è data da:

$$\text{cov}(x_i; y_j) = \text{cov}(x_{vcvi}; y_{vcvj}) + \sum_{k=1}^{n_x} \text{cov}(e_{ckxi}; y_{vcvj}) + \sum_{k=1}^{n_y} \text{cov}(x_{vcvi}; e_{ckyj}) \quad (18)$$

Data la proprietà della covarianza rispetto all'addizione (bilinearità della covarianza) e la covarianza con una costante pari a zero, risulta

$$\text{cov}(x_i; y_j) = \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{l=1}^{n_y} \text{cov}(e_{ckxi}; e_{cklyj}) \quad (19)$$

Gli errori possono essere scomposti in un errore LO e un errore HO.

$$\text{cov}(x_i; y_j) = \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{l=1}^{n_y} \text{cov}(e_{ckxi,LO} + e_{ckxi,HO}; e_{clyi,LO} + e_{clyi,HO}) \quad (20)$$

Per definizione, gli errori HO sono completamente indipendenti, quindi rimane

$$\text{cov}(x_i; y_j) = \sum_{k=1}^{n_x} \sum_{l=1}^{n_y} \text{cov}(e_{ckxi,LO}; e_{clyi,LO}) \quad (21)$$

Per proseguire, è necessario conoscere le cause d'incertezza che potrebbero essere comuni tra il campione e lo strumento. È quindi necessario completare la classica valutazione delle cause dell'incertezza introducendo una colonna per identificare l'elenco delle cause comuni, come riportato in Tab. 4.

Tabella 4 – Esempio di bilancio d'incertezza con colonna di causa comune

| Indice | Causa comune | ... | Scarto tipo | L_k |
|--------|--------------|------|-----------------------------------|-------|
| C1X | CC1X | | u_{c1x} oppure u_{cc1x} | 0% |
| C2X | CC2X | | u_{c2x} oppure u_{cc2x} | 80% |
| C1Y | | | u_{c1y} oppure u_{cc1y} | 100% |
| C2Y | CC2Y | | u_{c2y} oppure u_{cc2y} | 80% |
| C3Y | CC3Y | | u_{c3y} oppure u_{cc3y} | 0% |

Per interpretare questa tabella, si osservi che:

- le cause comuni sono indicate con CC*iX* e CC*iY*. Lo stesso indice *i* indica che le fonti d'incertezza sono comuni tra il campione (*x*) e lo strumento (*y*);
- le colonne "indice" e "causa comune" non hanno alcun collegamento d'indice tra di loro;
- alcune cause d'incertezza potrebbero non essere correlate: in questo caso, la casella della relativa causa comune è vuota;

– le cause comuni tra lo strumento e il campione hanno necessariamente lo stesso valore di L_k ; infatti, L_k rappresenta la variabilità della stessa sorgente d'incertezza durante la taratura;

– le cause comuni, naturalmente, non hanno gli stessi valori di deviazione standard u_{ccx} e u_{ccy} ;

– le deviazioni standard possono avere 2 sintassi di notazione a seconda che vengano utilizzate per la formula di covarianza tra i livelli o tra lo strumento e il campione. Naturalmente, il valore rimane lo stesso in entrambi i casi, è solo una notazione per semplificare le formule.

Una volta che le cause comuni vengono identificate, la formula si semplifica:

$$\text{cov}(x_i; y_j) = \sum_{k=1}^{n_{cc}} \text{cov}(e_{cckxi,LO}; e_{cckyi,LO}) \quad (22)$$

dove n_{cc} rappresenta il numero di sorgenti d'incertezza comuni.

Normalizzando gli errori, l'equazione diventa:

$$\text{cov}(x_i; y_j) = \sum_{k=1}^{n_{cc}} L_k u_{cckxi} u_{cckyi} \text{cov}\left(\frac{e_{cckxi,LO}}{\sqrt{L_k u_{cckxi}^2}}; \frac{e_{cckyi,LO}}{\sqrt{L_k u_{cckyi}^2}}\right) \quad (23)$$

Come prima, la covarianza dell'errore standardizzato è uguale a 1. Tuttavia, occorre fare attenzione alla direzione della variazione indotta dai fenomeni considerati. Ad esempio, la temperatura può essere una sorgente comune tra il campione e lo strumento. Ma la variazione di temperatura può variare nella stessa direzione per il campione e lo strumento (espansione di 2 parti metalliche per esempio) o nella direzione opposta.

Questa direzione di variazione tra il campione e lo strumento determina il segno della covarianza. È necessario conoscerlo e quindi aggiungere una colonna al bilancio d'incertezza, come indicato in Tab. 5. La colonna "direzione di variazione" indica se una variazione del fenomeno d'incertezza (ad esempio la temperatura) provoca una variazione nella stessa direzione della sorgente d'incertezza (ad esempio dilatazione o ritrazione della parte). Vedi Tab. 5 a pagina seguente.

Dalla direzione della variazione, è possibile dedurre il segno della covarianza tra il campione e lo strumento. Se la direzione della variazione è la stessa per le cause comuni, la covarianza è positiva, altrimenti è negativa. Questo può essere formalizzato matematicamente introducendo il prodotto con il "Segno" della causa comune. Se la direzione della variazione è "uguale", il segno è +1, altrimenti è -1. L'equazione diventa

$$\text{cov}(x_i; y_j) = \sum_{k=1}^{n_{cc}} L_k u_{cckxi} u_{cckyi} \text{segno}_{cckxi} \text{segno}_{cckyi} \quad (24)$$

Introducendo come fatto più sopra, il peso dell'incertezza di misura, risulta

Tabella 5 – Esempio di bilancio d’incertezza con direzione di variazione

| Indice | Causa comune | ... | Scarto tipo | L_k | Direzione di variazione |
|--------|--------------|------|-----------------------------------|-------|-------------------------|
| C1X | CC1X | | u_{c1x} oppure u_{cc1x} | 0% | uguale |
| C2X | CC2X | | u_{c2x} oppure u_{cc2x} | 80% | opposto |
| C1Y | | | u_{c1y} oppure u_{cc1y} | 100% | |
| C2Y | CC2Y | | u_{c2y} oppure u_{cc2y} | 80% | uguale |
| C3Y | CC3Y | | u_{c3y} oppure u_{cc3y} | 0% | uguale |

$$\text{cov}(x_i; y_i) = u_{xi}u_{yi} \sum_{k=1}^{n_{cc}} L_k \text{segno}_{cckxi} \text{segno}_{cckyi} \sqrt{P_{cckxi}P_{cckyi}} \quad (25)$$

Un ragionamento simile può essere fatto per le covarianze tra il campione e lo strumento su diversi livelli

$$\text{cov}(x_i; y_i) = u_{xi}u_{yi} \sum_{k=1}^{n_{cc}} L_k \text{segno}_{cckxi} \text{segno}_{cckyi} \sqrt{P_{cckxi}P_{cckyi}} \quad (26)$$

CONCLUSIONI

La nozione di covarianza viene spesso dimenticata nei bilanci delle cause d’incertezza. Questo articolo fornisce 3 formule (15), (16) e (26) per affrontare questo concetto. L’approccio presentato si basa su una valutazione classica delle cause dell’incertezza a cui vengono aggiunti 3 parametri basati sulla conoscenza dei processi di taratura:

- l’opportunità di espressione della varianza grazie al parametro L_k ;
- l’identificazione delle cause comuni d’incertezza tra lo strumento e il campione;
- identificazione della direzione di variazione delle incertezze;

È quindi possibile iniziare a prendere in considerazione la covarianza senza stravolgere le abitudini, ma al contrario

arricchendole con concetti già noti agli operatori ma formalizzati per tenerne conto nei risultati.

L’articolo utilizza la taratura per presentare il metodo, ma è ovviamente possibile utilizzare questo principio in altri casi rispetto alla taratura

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] UNI CEI 70098-3:2016 – “Incertezza di misura – Parte 3: Guida all’espressione dell’incertezza di misura”. JCGM 100:2008, *Evaluation of Measurement Data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM 1995 with minor corrections), Joint Committee for Guides in Metrology, 2008. [Online]. Disponibile in: www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html.

[2] JCGM 101:2008, *Evaluation of Measurement Data – Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement – Propagation of distributions using a Monte Carlo method*, Joint Committee for Guides in Metrology, 2008. [Online]. Disponibile in: www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html.

[3] JCGM 102:2011, *Evaluation of Measurement Data – Supplement 2 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement – Extension to any number of output quantities*, Joint Committee for Guides in Metrology, 2011. [Online]. Disponibile in: www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html.

[4] JCGM 200:2012, *International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms* (VIM 2008 with minor corrections), Joint Committee for Guides in Metrology, 2012. [Online]. Disponibile in: www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html.

[5] M. Bergoglio, A. Malengo, and D. Mari, “Analysis of inter-laboratory comparisons affected by correlations of the reference standards and drift of the travelling standards”, *Measurement*, vol. 44, no. 8, pp. 1461-1467, 2011. [Online]. Disponibile in: www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224111001680.

[6] P. D. Hale, A. Dienstfrey, J. C. M. Wang, D. F. Williams, A. Lewandowski, D. A. Keenan, and T. S. Clement, “Traceable waveform calibration with a covariance-based uncertainty analysis”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 58, no. 10, pp. 3554-3568, Oct. 2009.

[7] D. A. Humphreys, P. M. Harris, M. Rodriguez-Higuero, F. A. Mubarak, D. Zhao, and K. Ojasalo, “Principal component compression method for covariance matrices used for uncertainty propagation”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 64, no. 2, pp. 356-365, Feb. 2015.

[8] J.M. Pou et D. Vaissière, Delta Mu, La signature des processus d’étalonnage: les étalonnage vus sous l’angle statistique, dans les actes du congrès de métrologie de Lyon (2005).

[9] Collège Français de Métrologie (CFM), guide technique Application du nouveau concept d’étalonnage du VIM 3 (2012).